扬州大学

2020年硕士研究生招生考试初试试题（A卷）

科目代码 601 科目名称 数学分析 满分 150

注意：① 认真阅读答题纸上的注意事项；② 所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③ 本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、计算题（共50分，每题10分。要求有过程。）

1、求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2^{2020}}+\cdots+\dfrac{1}{n^{2020}}}$。

2、求极限 $\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)]$。

3、设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 y', y''。

4、利用公式 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ 求积分 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx$。

5、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的和函数。

二、论述题（共30分，每题6分。要求：先判断，然后正确的给出证明，错误的给出反例。）

1、若数列 $\{x_n\}$ 满足 $|x_{n+1}-x_n|\le\dfrac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|\ \ \forall n\ge2$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛。

2、若函数 f 在 x_0 处左右可导，则 f 在 x_0 处连续。

3、若 f 为 R 上的有界可导凸函数，则 f 必为常值函数。

4、若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，则其导函数 f' 在 $[a,b]$ 上可积。

5、若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 均收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛。

三、综合题（共 70 分，每题 10 分。要求有过程。）

1、用$\varepsilon-N$定义验证：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n}{n!}=0$。

2、设迭代数列$\{x_n\}$由下式定义：

$$x_1\in(0,\pi),\quad x_{n+1}=\sin x_n\quad(n\geq1),$$

求证：1）$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$；2）利用 Stolz 公式求$\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n^2$。

3、设函数f为R上的连续周期函数，求证：f在R上一致连续。并以此证明：

$\sin x^2$不是周期函数。

4、设函数f在$(0,+\infty)$内二次可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，举例说明此时$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$未必成立。

并证明：若还存在$M>0$，使得$|f''(x)|\leq M$，$\forall x>0$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$。

5、设f,g在$[a,b]$上可积，求证：Schwarz 不等式成立

$$[\int_a^b f(x)\,g(x)dx]^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx。$$

6、1）求证：e为无理数；2）求极限$\lim\limits_{n\to+\infty}n|\sin(\pi en!)|$。

7、设函数f在R上有界，可导且$|f'(x)|<1$，$\forall x\in R$，数列$\{x_n\}$由下式定义：

$$x_1\in R,\quad x_{n+1}=f(x_n),\quad\forall n\geq1,,$$

求证：$\{x_n\}$收敛。