

机密★启用前

四川轻化工大学 2020 年研究生招生考试业务课试卷

(满分: 150 分, 所有答案一律写在答题纸上)

适用专业: 0701 数学

考试科目: 601 数学分析 A 卷

考试时间: 3 小时

一、填空题 (本题满分 50 分, 每小题 5 分)

1. 曲线 $y = e^x$ 上的一点的切线过点 $(0,0)$, 则此切线方程为_____.
2. 设 $f(\sin x) = \cos 2x$, 则 $\int f(x)dx =$ _____.
3. 设 $f(x) = x^2 + x \int_0^1 f(x)dx$, 则 $f(x) =$ _____.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{\sqrt[3]{1 - \cos x^3}} =$ _____.
5. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x = e^k$, 则 $k =$ _____.
6. 设 $u_n > 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = \lambda$, 则 λ 满足: _____ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散.
7. 设函数 $f(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处有梯度, 则 $\text{grad } f(P_0) =$ _____.
8. 若 $f(x, y)$ 可微, 设 $z = f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.
9. 一质点受力 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), R(x, y, z))$ 的作用, 沿空间曲线 L 从点 A 移到点 B , 则力 \mathbf{F} 所作的功可用线积分表为 $W =$ _____.
10. Γ 函数的递推公式: $\Gamma(s+1) =$ _____.

二、(本题满分 12 分) 将三次积分 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz$ 分别在柱面坐标系、球面坐标系下化为一个三次积分.

三、(本题满分 15 分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{3^n}$ 的和.

四、(本题满分 15 分) 求出椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在第一卦限中的切平面与三个坐标平面所围成四面体的最小体积.

五、(本题满分 12 分) 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个正实数, $f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, 证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

六、(本题满分 14 分) 证明: 对任意实数 α , 下列等式成立.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^{\alpha} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cot^{\alpha} x} dx,$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^{\alpha} x} dx = \frac{\pi}{4}.$$

七、(本题满分 16 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上可导, 导函数有界, 证明:

(1) 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续,

(2) 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界.

八、(本题满分 16 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $f(1) = 0$, 证明:

(1) $\{x^n\}$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛,

(2) $\{x^n f(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.