扬 州 大 学

2020 年硕士研究生招生考试初试试题（ A 卷）

科目代码 **833**　科目名称 高等代数（工）　满分 150

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、（15 分）计算下列 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

二、（20 分）设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，证明：

(1)（6 分）若 $|A|=0$，则 $|A^*|=0$；

(2)（6 分）$|A^*|=|A|^{n-1}$；

(3)（8 分）秩$(A^*)=\begin{cases} n, & \text{当秩}(A)=n \\ 1, & \text{当秩}(A)=n-1 \\ 0, & \text{当秩}(A)<n-1 \end{cases}$　$(n\geq 2)$。

三、（20 分）A 是 2 阶矩阵，2 维列向量 α_1,α_2 线性无关，$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_2=4\alpha_1+\alpha_2$，求 A 的特征值和 $|A|$。

四、（25 分）已知 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$，$a$ 是 1 个实数。

(1)（20 分）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵；

(2)（5 分）计算行列式 $|A-E|$，其中 E 是 3 阶单位矩阵。

五、（15 分）已知 n 阶矩阵 A 满足：$A^3=E$，其中 E 是 n 阶单位矩阵。

(1)（8 分）证明 $A^2-2A-3E$ 可逆；

(2)（7 分）证明 A^2+A+2E 可逆。

六、(15 分)设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，又$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$, $\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$，证明：$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关。

七、(25 分)已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{bmatrix}$, $B=[b_1,b_2]=\begin{bmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{bmatrix}$，求

(1) (10 分) a为何值时，方程组$AX=B$有唯一解；

(2) (5 分) a为何值时，方程组$AX=B$无解；

(3) (10 分) a为何值时，方程组$AX=B$有无穷多解?并求出有无穷多组解时的通解。

八、(15 分) 设A为 3 阶对称矩阵，A的秩$R(A)=2$，且满足条件$A^3+3A^2=O$，

(1) (8 分) 求A的全部特征值；

(2) (7 分) 当k为何值时，$A-kE$为正定矩阵，其中O是零矩阵，E是 3 阶单位矩阵。