中国计量大学

2020 年硕士研究生招生考试试题

考试科目代码：813　　　　　　考试科目名称：高等代数

所有答案必须写在报考点提供的答题纸上，答在试卷或草稿纸上无效。

一、填空题（每小题 4 分，共 32 分）

1. 多项式 $f(x)=2x^3+3x^2+3x+1$ 和 $g(x)=x^4+x^2+1$ 的最大公因式是______________.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$ 的值为_____________.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$B=A^2-2A+E$，则 $B^{-1}=$_________________.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $P^{2019}AQ^{2020}=$
__________________________.

5. 在 R^3 中与向量（1，1，1）和（0，1，1）正交的单位向量是_______________.

6. 矩阵 $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值为_____________________.

7. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩 $r(A)=$__________.

8. 已知方程$\begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 2 \\ 2 & 2 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$有无穷多组解，则$t=$____________.

二、单选题（每小题 4 分，共 28 分）

1.若行列式$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$中代数余子式$A_{12}=-1$，则$A_{13}=$__________.

A.　-11　　　　B.　0　　　　C.　2　　　　D.　3

2.n维向量组α_1，α_2，...，α_s（$3\le s\le n$）线性无关的充要条件是______.

A.α_1，α_2，...，α_s中任意两个向量都线性无关；

B.α_1，α_2，...，α_s中存在一个向量，它不能由其余向量线性表示；

C.α_1，α_2，...，α_s中任意一个向量都不能由其余向量线性表示；

D.存在一组不全为零的数k_1，k_2，...，k_s，使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$.

3.已知齐次线性方程$AX=0$，其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，

$$A=\begin{pmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{pmatrix},\ \sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

A.当$\sum_{i=1}^{n}a_i+b\neq 0$且$b\neq 0$时，方程只有零解；

B.当$\sum_{i=1}^{n}a_i+b\neq 0$且$b\neq 0$时，方程只有非零解；

C.当$\sum_{i=1}^{n}a_i+b=0$且$b\neq 0$时，方程只有零解；

D.当$\sum_{i=1}^{n}a_i+b=0$或$b=0$时，方程只有零解.

4. 设 A、B 为四阶方阵， $r(A)=3$，$r(B)=4$，它们的伴随矩阵是 A^*，B^*，则

$r(A^*B^*)=$________________.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵， B 为 $n\times m$ 矩阵，则__________.

A. 当 $m>n$ 时，方阵 AB 可逆； B. 当 $m>n$ 时，方阵 AB 不可逆；

C. 当 $m=n$ 时，方阵 AB 不可逆； D. 当 $m<n$ 时，方阵 AB 不可逆.

6. 已知二阶实对称矩阵 A 的一个特征向量是 $(-3,1)^T$，且 $|A|<0$，则下面向量中必为 A 的特征向量的是__________.

A. $c(-3,1)^T$, $c\neq 0$ B. $c(1,3)^T$, $c\neq 0$ C. $c_1(1,3)^T+c_2(-3,1)^T$, $c_1, c_2\neq 0$

D. $c_1(1,3)^T+c_2(-3,1)^T, c_1, c_2$ 有一个为零，但不同时为零

7. 矩阵 $\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 相似的充要条件是_________.

A. $a=0, b=2$ B. $a=0, b$ 为任意常数

C. $a=0, b=0$ D. $a=2, b$ 为任意常数

三、解答题（本题共 7 小题，满分 90 分，解答应写出文字说明、验算步骤）

1.（10 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2\\ n-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}$.

2.（11 分）判断两个向量 $\beta_1=(4,3,-1,11)$，$\beta_2=(4,3,0,11)$ 是否为向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,5)$，$\alpha_2=(2,-1,1,1)$ 的线性组合. 若是，请写出表达式.

3.（13 分）设 A、B 均为 n 阶矩阵，且满足 $A^2=A, B^2=B, (A+B)^2=A+B$，证明：矩阵 AB 是零矩阵.

4.（15 分）已知α_1，α_2，α_3是三维向量空间的一组基，求由基α_1，$\frac{1}{2}\alpha_2$，$\frac{1}{3}\alpha_3$到基$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵.

5.（14 分）对于线性方程组$\begin{cases}\tau x_1+x_2+x_3=\tau-3\\ x_1+\tau x_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+\tau x_3=-2\end{cases}$，讨论$\tau$为何值时，方程组无解，有唯一解，有无穷多组解；在无穷多组解时给出通解.

6.（13 分）设n阶可逆方阵A的各行元素之和为m，证明或求解：

（1）$m\neq 0$；　（4 分）

（2）A^{-1}各行元素之和为$\frac{1}{m}$；（4 分）

（3）求$2A^{-1}-5A$的各行元素之和.（5 分）

7.（14 分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$，

（1）写出二次型f的矩阵表达式；（2 分）

（2）用正交变换把二次型f化为标准形，并写出相应的正交矩阵.（12 分）

【完】