中国计量大学

2021 年硕士研究生招生考试试题

考试科目代码：813　　　　考试科目名称：高等代数

所有答案必须写在报考点提供的答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

一、填空题（每小题 4 分，共 32 分）

1.实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_1x_2+ax_2^2+3x_3^2$，当 $a=$____时二次型的秩为 2.

2.计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}2&3&0&0\\1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{vmatrix}$=____.

3.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&3&-2&0\\0&0&7&0&0\\0&0&0&0&8\end{pmatrix}$，则$A^2$=____.

4.设 $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\\4&0\end{pmatrix}$，则 $BA=$____.

5.求一个与$\alpha_1=(2, 4, -2, 1)$，$\alpha_2=(0, 0, 0, 1)$，$\alpha_3=(2, 3, 4, 3)$都正交的单位向量$\beta=$____.

6.已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{pmatrix}$和矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&-2&b\end{pmatrix}$相似，则 $a=$____, b=____.

7.矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$的秩为 2，则 $a=$____.

8.矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则$A^{2021}-2A^{2020}$=____.

二、单选题（每小题 4 分，共 28 分）

1.设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\5&5&4&3&3\\3&2&4&5&2\\2&2&1&1&1\\4&3&5&2&1\end{vmatrix}$，则$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}+5A_{35}=$____.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

2.设α_1，α_2，⋯，α_s和β_1，β_2，⋯，β_t为两个 n 维向量组，如果____，则α_1，α_2，⋯，α_s和β_1，β_2，⋯，β_t的秩相等.

A. 两个向量组等价

B. $s=t$

C. β_1，β_2，⋯，β_t可由α_1，α_2，⋯，α_s线性表示

D. α_1，α_2，⋯，α_s可由β_1，β_2，⋯，β_t线性表示

3. $f(x)=\begin{pmatrix}x^2-3&2&3&4\\1&2&3&4\\4&5&6&7\\4&5&x^2-3&7\end{pmatrix}$=0 的根（包括重根）的个数为____.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4.设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3$，A^*为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第 1 行与第 2 行得到矩阵 B，则$|BA^*|=$____.

A. -3　　B. 3　　C. -27　　D. 9

5.设 A、B、C 均为 n 阶方阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 $B=E+AB$，$C=C+CA$，则 $B-C=$____.

A. E　　B. $-E$　　C. A　　D. $-A$

6.设λ_1与λ_2是矩阵 A 的两个不同的特征值，ξ，η是 A 的分别属于λ_1与λ_2的特征向量，则下列结论成立的是____.

A. 对任意$k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$，$k_1\xi + k_2\eta$都是 A 的特征向量

B. 存在常数$k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$，使得$k_1\xi + k_2\eta$是 A 的特征向量

C. 当$k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$，$k_1\xi + k_2\eta$不可能是 A 的特征向量

D. 存在唯一的一组常数$k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$，使得$k_1\xi + k_2\eta$是 A 的特征向量

7.设 A，B 为 n 阶矩阵，且 A 与 B 相似，E 为 n 阶单位矩阵，则____.

A. $\lambda E - A = \lambda E - B$

B. A 与 B 有相同的特征值和特征向量

C. A 与 B 都相似于一个对角矩阵

D. 对任意常数 t，$tE - A$ 和 $tE - B$ 相似

三、解答题（本题共 7 小题，满分 90 分，解答应写出文字说明，验算步骤）

1.（10 分）计算$D_n = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

2.（11 分）已知 m 个向量α_1，α_2，$\cdots$，α_m线性相关，但其中任意 $m-1$ 个向量都线性无关.

证明：如果存在等式$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$，则这些系数$k_1$，$k_2$，$\cdots$，$k_m$或者全为 0，或者全不为 0.

3.（13 分）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，利用分块矩阵求 AB.

4.（15 分）由向量组$\alpha_1=(2,\ 1,\ 3,\ 7)^T$，$\alpha_2=(-1,\ 0,\ 1,\ 0)^T$，$\alpha_3=(4,\ 1,\ 1,\ 7)^T$，$\alpha_4=(-3,\ -1,\ 0,\ -3)^T$生成的向量空间 V，求 V 的基和维数.

5.（14 分）已知$a^2-b^2\neq 0$，证明方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_{2n}=1 \\ ax_2+bx_{2n-1}=1 \\ \cdots\cdots \\ ax_n+bx_{n+1}=1 \\ bx_n+ax_{n+1}=1 \\ bx_{n-1}+ax_{n+2}=1 \\ \cdots\cdots \\ bx_1+ax_{2n}=1 \end{cases}$$

有唯一解，并求解.

6.（13 分）设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 $B=E+A$ 的逆矩阵.

7.（14 分）设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 1，2，-2，且$\alpha_1=(1,\ -1,\ 1)^T$是 A 的属于特征值 1 的一个特征向量。记 $B=A^3-4A+E$，其中 E 为三阶单位矩阵。验证α_1是矩阵 B 的特征向量，并求出 B 的全部特征值和特征向量.

【完】