

中欧航空工程师学院研究生入学考试《数学分析与高等代数》 考试大纲

一、考题类型

《数学分析与高等代数》可目试卷共设置六个题目，其中两个简答题各20分，两个基础题各25分，以及两个综合题各30分，总计150分。

二、参考书目

- (1) 《Mathematiques tout-en-un I annee》, Dunod
- (2) 《Mathematiques tout-en-un II annee》, Dunod
- (3) 《中欧学院预科数学讲义》，中欧学院数学教研室

三、知识要点

第一部分：单变量微积分

(一) 数列

- 1 数列极限的定义及运算
- 2 判断数列收敛方法：单调有界收敛定理、夹挤定理、收敛数列子列必收敛、柯西数列必收敛
- 3 数列的比较， O, o 与等价；常见数列的比较
- 4 递归数列的极限

(二) 极限与连续

- 1 函数极限的定义（9种情况），函数极限的四则运算，复合函数的极限
- 2 函数在一点极限存在性判断：夹挤定理、单调函数极限的存在性、归结原理（函数极限与数列极限的关系）
- 3 函数的比较， O, o 与等价；常见函数的比较
- 4 闭区间上连续函数定理：介值定理、最值定理

(三) 导数

- 1 导数、左导数、右导数的定义，导数的四则运算，复合函数求导，反函数求导
- 2 高阶导数，莱布尼兹公式， C^k -类函数的定义及各种运算
- 3 基本初等函数的导函数
- 4 罗尔定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理，有限增量不等式
- 5 极限展开式的定义，极限展开式的运算
- 6 基本初等函数的极限展开式，极限展开式的应用：求极限、找等价

(四) 积分

- 1 闭区间上分段连续函数积分的定义
- 2 积分的保序性, 线性性, 可加性, 柯西-施瓦茨不等式
- 3 连续函数的原函数
- 4 积分的计算: 分部积分与变量替换公式, 有理函数的积分, 无理函数的积分, 含有三角函数的复合函数的积分

第二部分: 高等代数

(五) 自然数

- 1 有限集基数计算公式
- 2 数学归纳原理

(六) 向量空间

- 1 向量空间、子空间的定义, 由子集生成的子空间的定义及表示方法
- 2 子空间的和与直和, 互补子空间, 向量空间的直积
- 3 线性映射、线性型、自同态的定义; 线性映射集的向量空间结构
- 4 线性映射的复合; 线性映射的核与象集; 单同态、满同态、自同态、同构的定义; 同构映射的逆映射
- 5 对称和投影的定义及等价刻画

(七) 有限维向量空间

- 1 线性无关族, 线性相关族, 生成族及向量空间基的定义
- 2 有限维向量空间及其维数的定义
- 3 基的扩充定理
- 4 子空间的和与直和的维数计算公式; 补空间的存在性与构造
- 5 秩定理

(八) 多项式

- 1 多项式的次数, 多项式的加法和乘法运算
- 2 一元多项式集合 $\mathbb{K}[X]$ 的向量空间结构和环结构
- 3 多项式的因式和倍式, $\mathbb{K}[X]$ 中的带余除法, 辗转相除法
- 4 多项式函数与有理函数
- 5 多项式的导数, 高阶导数, 乘积多项式高阶求导的莱布尼兹公式, 泰勒公式及其应用: 刻画多项式根的重数
- 6 两个多项式的公因子, 互素多项式, 最大公约式, 欧几里得算法, 最大公倍式, 贝祖定理, 高斯定理.

- 7 不可约多项式，多项式的不可约分解式的存在唯一性，能熟练将一个实系数多项式在实数域或复数域内进行不可约分解

(九) 矩阵

- 1 矩阵的运算：加法、乘法、数乘与转置
- 2 线性映射在给定基下的矩阵，矩阵与线性映射之间的一一对应关系
- 3 过渡矩阵，同一线性映射在不同基下的矩阵之间的关系
- 4 矩阵的初等行、列变换，初等变换求可逆矩阵的逆矩阵
- 5 矩阵秩的定义，初等变换求矩阵的秩，矩阵秩的等价刻画

(十) 行列式

- 1 行列式的定义
- 2 行列式的计算：矩阵相乘的行列式，转置矩阵的行列式，矩阵初等变换与行列式
- 3 余子式，代数余子式，矩阵按行列展开
- 4 伴随矩阵，利用伴随矩阵表示可逆矩阵的逆矩阵
- 5 掌握行列式的计算各种常用方法

(十一) 线性变换的约化

- 1 不变子空间、诱导映射的定义，诱导映射的矩阵刻画
- 2 线性变换在不变子空间的直和分解下的矩阵表示（准对角矩阵）
- 3 线性变换（或方阵）特征值、特征向量、特征子空间及谱的定义
- 4 特征多项式，特征值的重数，汉密尔顿-凯莱定理
- 5 线性变换（或方阵）可对角化的定义；线性映射（或方阵）可对角化的各种判别法
- 6 会判断一个线性映射（或方阵）能否对角化，会将一个（三阶）可对角化的方阵进行对角化

(十二) 欧式空间

- 1 内积的定义，柯西-施瓦茨不等式
- 2 向量正交、正交族、单位正交族及单位正交基的定义
- 3 会用施密特正交化将线性无关族单位正交化
- 4 正交补，正交对称及正交投影的定义及等价刻画
- 5 正交变换和正交矩阵的定义及等价刻画

第三部分：级数与广义积分

(十三) 数项级数

- 1 黎曼级数的敛散性, 正项级数收敛判别法: 比较判别法、积分比较法
- 2 交错级数的敛散性, 收敛交错级数余项的上界
- 3 级数收敛的柯西准则, 达朗贝尔判别法
- 4 绝对收敛级数必收敛, 绝对收敛级数的柯西乘积

(十四) 函数列与函数项级数

- 1 函数列简单收敛, 一致收敛定义
- 1 函数项级数简单收敛, 一致收敛, 依范数收敛定义
- 2 熟练掌握函数列一致收敛、函数项级数一致收敛和依范数收敛各种判别法
- 3 一致收敛函数列(函数项级数)和函数的连续性、可导性定理
- 4 函数项级数组逐项积分定理

(十五) 幂级数

- 1 幂级数收敛半径定义
- 2 掌握求幂级数收敛半径常用方法
- 3 两个幂级数和函数的收敛半径, 两个幂级数柯西乘积的收敛半径
- 4 实变量幂级数和函数的性质: 连续性、可导性以及和函数的积分
- 5 实变量函数幂级数展开的定义及运算
- 6 熟练掌握各基本初等函数的幂级数展开式

(十六) 广义积分

- 1 非负函数可积性定义及各种判别法: 比较判别法、原函数判别法; 积分可加性,
- 2 复值函数可积性定义及判别准则
- 3 控制收敛定理, 逐项积分定理
- 4 广义积分变量替换公式
- 5 含参变量的积分: 连续性定理和可导性定理

(十七) 傅里叶级数

- 1 傅里叶系数的定义、性质与计算
- 2 均方收敛(依二范数收敛)的定义, 帕塞瓦尔-贝塞尔等式
- 3 准点收敛定理
- 4 依范数收敛定理

第四部分: 多变量微积分

(十八) 多元函数的极限与连续性

- 1 平面点集的有关概念以及平面点列的定义
- 2 二元函数极限的定义与计算
- 3 二元函数连续性定义
- 4 向量空间 $C(A, \mathbb{R})$ 、 $C(A, \mathbb{R}^2)$

(十九) 多元函数微分学

- 1 多元函数的偏导数定义与计算
- 2 多元函数的一阶极限展开式、可微性与全微分定义
- 3 复合函数计算偏导数/导数的链式法则
- 4 方向导数的定义、梯度的定义与计算
- 5 高阶偏导数的定义与计算，掌握Schwarz定理
- 6 二元函数的Taylor公式、带积分型余项的Taylor公式、二阶Taylor-Young公式
- 7 二元函数的极值: 极值的定义, C^1 -类函数极值的必要条件、 C^2 -类函数极值的充分条件

(二十) 重积分

- 1 有界闭集上连续函数二重积分的定义及其性质
- 2 二重积分的常用计算方法: 在直角坐标系下计算、利用变量替换法计算(包括利用极坐标计算)
- 3 有界闭集上连续函数三重积分的定义及其性质
- 4 三重积分的常用计算方法: 在直角坐标系下计算(包括投影法和截面法)、利用变量替换法计算(包括利用柱坐标、球坐标计算)

第五部分: 微分方程

(二十一) 微分方程

- 1 一阶线性微分方程求解, 必要时考虑解的连接
- 2 常见二阶常系数线性微分方程求解
- 3 常系数一阶线性微分方程组求解
- 4 求二阶齐次线性微分方程多项式解和幂级数解
- 5 降阶法或借助朗斯基行列式的方法求解二阶线性微分方程