

安徽师范大学

2020 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码: 615

科目名称: 高等数学 I

一、填空题 (每小题 5 分, 共 50 分, 把答案填在答题纸上)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x \geq c \\ 4x, & x < c \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则常数 $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. $\int \frac{1}{1 + \tan x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 曲线 $y = \sin x$ 与直线 $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$ 所围成图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 曲线 $\tan\left(x + 2y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. $\int_{-2}^2 (x + \sqrt{4 - x^2})^2 dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 二阶线性微分方程 $y'' - 4y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设 $z = x^y$, 则全微分 $dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 A 是 3 阶方阵, A^* 和 A^{-1} 分别为 A 的伴随矩阵和逆矩阵, A 的行列式 $|A| = 2$, 则行列式

$|A^{-1} + A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 则 $E(X^2 + X \cos X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、(本题 15 分) 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geq 0. \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的可导性.

三、(本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$,

$$\text{使得 } f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}.$$

四、(本题 15 分) 证明方程 $\arctan x - \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$ 恰有两个实根.

五、(本题 15 分) 计算二重积分 $\iint_D \frac{y \sin x}{x} dx dy$, 其中 D 由曲线 $y = \sqrt{x}$ 与直线 $y = x$ 所围的区域.

六、(本题 20 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(I) 求满足 $A\eta_2 = \eta_1$, $A^2\eta_3 = \eta_1$ 的所有向量 η_2, η_3 ;

(II) 对于 (I) 中的任意向量 η_2, η_3 , 证明: η_1, η_2, η_3 线性无关.

七、(本题 20 分) 设总体 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-(1-\theta)x}, & x \geq 0 \end{cases}$ 其中 $\theta > 1$ 为未知

参数, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的样本,

(1) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$; (2) 求数学期望 $E\left(\frac{1}{\hat{\theta}-1}\right)$.