

# 安徽师范大学

## 2019 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码: 615

科目名称: 高等数学 I

一、填空题 (每小题 3 分, 共 30 分, 把答案填在答题纸上)

1. 设函数  $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \geq 0 \\ e^{3x} - x, & x < 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处可导, 则常数  $a =$  \_\_\_\_\_.
2. 函数  $f(x) = \int_1^x (t-1)e^t dt$  的极小值点为 \_\_\_\_\_.
3. 曲线  $y = \frac{1}{x}$  与直线  $y = x$ ,  $x = 2$  所围成图形的面积为 \_\_\_\_\_.
4. 设连续函数曲线  $y = f(x)$  与  $y = e^x - 1$  在原点相切, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{3}{n}\right) =$  \_\_\_\_\_.
5. 二阶线性微分方程  $y'' + y' - 2y = 0$  的通解为 \_\_\_\_\_.
6. 已知  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  连续, 且  $\int_0^x f(t) dt = \arctan x$ , 则  $\int_0^1 x^2 f(x) dx =$  \_\_\_\_\_.
7. 一阶微分方程  $(y^2 - 2x)dy - ydx = 0$  的通解为 \_\_\_\_\_.
8.  $\int_{-\pi}^{\pi} (t + \sin t + 1) \cos^2 t dt =$  \_\_\_\_\_.
9. 设  $A$  是 3 阶方阵,  $A^*$  和  $A^{-1}$  分别为  $A$  的伴随矩阵和逆矩阵,  $A$  的行列式  $|A| = 2$ , 则行列式  $\left| \frac{1}{2} A^* + A^{-1} \right| =$  \_\_\_\_\_.
10. 设连续型随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$  则数学期望  $E(X^2 + \sin X) =$  \_\_\_\_\_.

二、(本题 10 分) 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x+1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$ .

三、(本题 10 分) 求函数  $z = 3 + x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$  的极值点.

四、(本题 10 分) 证明: 当  $x > 0$  时,  $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$ .

五、(本题 15 分) 计算二重积分  $I = \iint_D \frac{xe^{x^2+y^2}}{x+y} dx dy$ , 其中  $D: x^2 + y^2 \leq 1, x > 0, y > 0$ .

六、(本题 15 分) 设  $t > 0$  时,  $f(t)$  有二阶连续导数,  $z = f(xy)$  满足  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y^2$ , 求  $f(t)$  ( $t > 0$ ).

七、(本题 15 分) 已知齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases} \text{ 与 } (II) \begin{cases} 3x_1 + ax_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_2 - 5x_3 + (a-1)x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零公共解, 求  $a$  的值及其所有公共解.

八、(本题 15 分) 已知三阶矩阵  $A$  第一行的 3 个元素分别是  $3, -1, -2$ , 又  $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, 2, 0)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, 0, 1)^T$  是矩阵  $A$  的三个特征向量, 求矩阵  $A$ .

九、(本题 15 分) 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ , 令  $Y = X^2$ , 证

明:  $X$  与  $Y$  不相关.

十、(本题 15 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$  上的均匀分布, 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} X & ? & 3 \\ 1 & Y & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  是正定矩阵的概率.