安徽师范大学

2018 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码：891

科目名称：高等代数

一、(15 分) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$g_1(x)$，$g_2(x)$ 是数域 P 上的多项式，$a\in P$ 满足 $f_1(a)=0$，$g_2(a)\neq 0$，且 $f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)=x-a$．证明：$\left(f_1(x),f_2(x)\right)=x-a$．

二、(15 分) 设 m 是正整数，$f(x)$ 是整系数多项式，$f(x)$ 的次数 $n=2m$ 或 $n=2m+1$．$a_1,a_2,\cdots,a_s$ 为互不相同的整数，$s>2m$，且 $f(a_i)=1$ 或 $-1, i=1,2,\cdots,s.$ 证明：$f(x)$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

三、(15 分) 设 a，b，c，d 是不全为零的实数，求出齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \\ bx_1-ax_2+dx_3-cx_4=0 \\ cx_1-dx_2-ax_3+bx_4=0 \\ dx_1+cx_2-bx_3-ax_4=0 \end{cases}$$

的所有解.

四、(15 分) 设 A 为数域 P 上的 $n\times s$ 矩阵，证明：秩$(A)<n$ 的充分必要条件是存在非零矩阵 B 使得 $BA=0$.

五、(20 分) 设 V 是数域 P 上的线性空间，V 的线性变换 f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}，向量 \eta_1=\varepsilon_1,\eta_2=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3,\eta_3=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3.$$

1、 证明：η_1,η_2,η_3 也是 V 的一组基；

2、 求线性变换 f 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵；

3、 求矩阵 A^{2018}.

六、(20分) 设3阶实对称矩阵A的各行元素之和均为1，$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$是A的两个特征值，E为3阶单位矩阵，$B=A^5-4A^3+E$. 求：

1、 求B的全部特征值和特征向量；

2、 求矩阵B.

七、(15分) 设A为n阶实方阵，A^T为A的转置矩阵，E为n阶单位矩阵. 若$E-AA^T$是可逆矩阵，证明：

1、 $E-A^TA$也是可逆矩阵；

2、 $A^T(E-AA^T)^{-1}=(E-A^TA)^{-1}A^T$.

八、(20分) 设S,A是n阶实方阵，$P=S+A$，α^T是向量α的转置. 证明：

1、 A为反对称矩阵的充分必要条件是$\alpha^T A\alpha=0$，对任意实的n维列向量α都成立；

2、 若S是对称矩阵，A是反对称矩阵，则S为正定矩阵的充分必要条件是$\alpha^T P\alpha>0$，对任意实的n维非零列向量α都成立.

九、(15分) 设J为一个k级若尔当块，A为n阶复方阵，J^T和A^T分别为J和A的转置矩阵，证明：

1、J^T和J是相似的；

2、存在n阶可逆对称矩阵P，使得$P^{-1}AP=A^T$.