

安徽师范大学

2019 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码: 724

科目名称: 高等数学 II

一、单项选择题 (每小题 3 分, 共 21 分):

- 若 $f(x-1)=x^2(x-1)$, 则 $f(x)=$ ()
 A. $x^2(x-1)$ B. $x^2(x+1)$ C. $x(x-1)^2$ D. $x(x+1)^2$
- 下面结论正确的是 ()
 A. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = e$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{-1}{x}} = e$
 C. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = e$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} = e$
- 函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处 ()
 A. 连续 B. 不连续, 但右连续
 C. 不连续, 但左连续 D. 左、右都不连续
- 设 $y = x \ln x$, 则 $y^{(10)} =$ ()
 A. $\frac{1}{x^9}$ B. $-\frac{1}{x^9}$ C. $\frac{8!}{x^9}$ D. $-\frac{8!}{x^9}$
- 下列曲线中有拐点 $(0,0)$ 的是 ()
 A. $y = x^2$ B. $y = x^3$ C. $y = x^4$ D. $y = x^{\frac{2}{3}}$
- 设 $f(x) = e^{-x}$, 则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx =$ ()
 A. $\frac{1}{x} + C$ B. $-\frac{1}{x} + C$ C. $\ln x + C$ D. $-\ln x + C$
- 设 $f(x) = \int_a^x 12t^2 dt$ 且 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 则 $a =$ ()
 A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

二、填空题 (每小题 3 分, 共 21 分):

- 函数 $y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$ 的连续区间为 _____.
- 曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $(\frac{1}{2}, 2)$ 处的切线方程为 _____.
- 函数 $f(x) = \ln x$ 在区间 $[1, e]$ 上满足拉格朗日公式的 $\xi =$ _____.
- 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1+t^2) e^{t^2-x^2} dt =$ _____.
- 隐函数 $xy = e^{x+y}$ 的微分 $dy =$ _____.
- 已知反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+kx^2}$ 收敛于 1 ($k > 0$), 则 $k =$ _____.
- 在 y 轴上与点 $(1, -3, 7)$ 和点 $(5, 7, -5)$ 等距离的点是 _____.

三、解答题 (每小题 10 分, 共 80 分):

- 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$.
- 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$.
- 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.
- 求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点和凹、凸区间.
- 求 $\int e^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x \right) dx$.
- 求 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$.
- 求由曲线 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $y^2 = \frac{3}{2}x$ 所围成的两个图形中较小的一个绕 x 轴旋转所产生的旋转体的体积.
- 求过三点 $M_1(2, -1, 4)$ 、 $M_2(-1, 3, -2)$ 和 $M_3(0, 2, 3)$ 的平面方程.

四、证明题 (每小题 7 分, 共 28 分):

- 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) < a$, $f(b) > b$, 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = \xi$.

2. 证明: 当 $x > 1$ 时,

$$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}.$$

3. 设 $f(x) = x^3 - \int_0^a f(x) dx$, 且 $a \neq -1$, 证明:

$$\int_0^a f(x) dx = \frac{a^4}{4(a+1)}.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上可导, 且 $f(0) = 0$, $|f'(x)| < M$ (M 为大于零的常数), 证明: 在 $[-1, 1]$ 上恒成立

$$|f(x)| < M.$$