安徽师范大学

2019 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码：891

科目名称：高等代数

一、(15 分) 设 m,n,p 是正整数，证明：x^2+x+1 整除 $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$.

二、(15 分) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是数域 P 上的两个互素的多项式，k 是正整数. 证明：

$$\left(f(x^k),g(x^k)\right)=\left(f^k(x),g^k(x)\right).$$

三、(15 分) 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

四、(15 分) 设 A,B 为两个 $m\times n$ 矩阵，证明：A 的行向量组与 B 的行向量组等价的充分必要条件是线性方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

五、(15 分) 设 A 为 n 阶方阵，证明：$A^2=A$ 的充分必要条件是 秩$(A)+$秩$(A-E)=n$.

六、(20 分) 设 V 是数域 P 上的线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是 V 的一组基，V 的线性变换 f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1、分别求出 f 的值域 $f(V)$ 与核 $f^{-1}(0)$ 的维数及一组基；

2、判断 $V=f(V)+f^{-1}(0)$ 是否成立？并说明理由.

七、(20分) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$. 已知$A$与对角矩阵相似，$\lambda=2$是$A$的二重特征值，求：

1、x,y的值；

2、可逆阵P，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵.

八、(20分) 设3阶方阵$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{pmatrix}$，求：

1、A的行列式因子、不变因子及初等因子；

2、A的最小多项式及若尔当(Jordan)标准形.

九、(15分) 设n阶实数方阵A是反对称的(即A的转置$A^T=-A$)，E为n阶单位矩阵，证明：

1、A的特征值的实部一定是零；

2、矩阵$E-A^2$是正定矩阵.