安徽师范大学

2018 年硕士研究生招生考试初试试题

科目代码： 615

科目名称： 高等数学 I

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分，把答案填在答题纸上）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{x}-x-1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x\ln(1+x^{2})}=$__________.

2. 设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+a, & x\geq 0\\ \left(1-x\right)^{\frac{1}{x}}, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则常数 $a=$__________.

3. $\displaystyle\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^{2017}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$__________.

4. 曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=1,\ y=0$ 所围成图形绕 y 轴旋转一周的体积为__________.

5. 过点 $\left(3,0\right)$ 与曲线 $y=\dfrac{1}{x^{2}}$ 相切的直线方程为__________.

6. 已知 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\ 1\right]$ 连续，且 $\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\arctan x$，则 $\int_{0}^{1}xf(x)\mathrm{d}x=$______.

7. 二阶线性微分方程 $y''+y'-2y=-2x$ 的通解为__________.

8. 曲线 $f(x)=\arctan x$ 的拐点为__________.

9. 设 A 是 4 阶方阵，A^{*} 和 A^{-1} 分别为 A 的伴随矩阵和逆矩阵，A^{*} 的行列式 $\left|A^{*}\right|=8$，则行列式 $\left|A^{-1}\right|=$__________.

10. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}|x|, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 则方差 $D\left(X\right)=$_______.

二、（本题 10 分）已知函数 $f(x)=2x^{3}-12x^{2}+a$ 在区间 $\left[-1,\ 2\right]$ 的最小值为 3，求常数 a 的值.

三、（本题10分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=f(\xi)$.

四、（本题10分）设函数$f(x)$可导，且$f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=e^x$，求$f(x)$.

五、（本题15分）计算二重积分$\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由$x^2+y^2=1$及$x^2+y^2=4$与直线$y=x$，$y=0$在第一象限所围的区域.

六、（本题15分）设$F(u,v)$具有二阶连续偏导数，a,b,c为常数，若$aF_u'(u,v)+bF_v'(u,v)\neq 0$，证明：由方程$F(cx+az,cy+bz)=0$所确定的函数$z=z(x,y)$满足

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+c=0.$$

七、（本题15分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&-6\\0&0&3\end{pmatrix}$，矩阵$X$满足$A^*X=A^{-1}+2X$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，求矩阵$X$.

八、（本题15分）设A为$n\times m$阶矩阵，B为$m\times n$阶矩阵. 证明：方阵AB与BA有相同的非零特征值.

九、（本题15分）设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x}{2}, & 0<x<1,\ -x<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明：X与Y不相关，但X与Y不是相互独立的.

十、（本题15分）设随机变量X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}|x|, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 令$Y=\begin{cases}X, & X\geq 0,\\ X^2, & X<0.\end{cases}$ 求数学期望$E(XY)$.