

# 汕头大学 2020 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 612  
科目名称: 数学分析  
适用专业: 数学

考生须知  
答案一律写在答题纸上, 答在  
试题纸上的不得分! 请用黑色字迹  
签字笔作答, 答题要写清题号, 不  
必抄原题。

1. (每小题 5 分) 判断下列极限是否存在, 如果存在, 求其值。

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{-t^2} dt}{x^2}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$

(4)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

2. (每小题 8 分) 计算下列积分

(1)  $\iiint_V e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz$ , 其中  $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 。

(2)  $\int_C xy^2 dy - yx^2 dx$ , 其中  $C$  为单位圆周取逆时针定向。

3. (10 分) 求由曲线  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$  所围成的有界闭域的面积。

4. 在第一象限中, 求单位球面:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的切平面分别使得:

(1) 与坐标轴围成的四面体体积最小; (8 分)

(2) 与坐标轴的截距平方之和最小。(8 分)

5. (15 分) 设  $f(x)$  是闭区间  $[a, b]$  上二阶可导, 且满足  $f(a) = f(b) = 0$  及

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0.$$

证明: 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f''(\xi) < 0$ 。

6. (15 分) 证明积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  条件收敛。

7. (15 分) 将函数  $f(x) = x$  ( $x \in [-\pi, \pi)$ ) 展开成傅里叶 (Fourier) 级数并证明

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

## 汕头大学 2020 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

8. 设  $f(x)$  是闭区间  $[0,1]$  上的连续可微函数。

(1) (10 分) 利用  $F(x,y) = (f(x) - f(y))^2$  在  $[0,1] \times [0,1]$  上的重积分证明:

$$\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx.$$

(2) (5 分) 设  $g(x)$  是  $[0,1]$  上的线性函数使得  $g(0) = f(0)$  且  $g(1) = f(1)$ 。证明:

$$\int_0^1 (g'(x))^2 dx \leq \left(\int_0^1 f'(x) dx\right)^2.$$

9. (9 分) 设  $f(x,y)$  是  $\mathbb{R}^2$  上的连续可微函数, 且对任意  $\lambda > 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ , 均有

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

证明:  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$ 。

10. (9 分) 设  $f(x,y)$  是  $\mathbb{R}^2$  上的二阶连续可微函数, 且  $(0,0)$  是  $f(x,y)$  的极小值点。

证明: 矩阵  $\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix}$  是半正定的。

11. 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是严格单调递增的连续函数, 且满足

$$f(x+1) = f(x) + 1.$$

令  $g(x) = f(x) - x$ 。证明:

(1) (2 分) 1 是函数  $g(x)$  的一个周期。

(2) (2 分)  $\sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \max_{x \in [0,1]} g(x)$  和  $\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \min_{x \in [0,1]} g(x)$ 。

(3) (6 分)  $\sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) - \inf_{x \in \mathbb{R}} g(x) \leq 1$ 。