

汕头大学 2019 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：814

科目名称：高等代数

适用专业：数学

考生须知

答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答，答题要写清题号，不必抄原题。

一. (20分) (1) 设 p 为素数，证明多项式 $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ 在有理数域上是不可约多项式。

(2) 设 $f(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$ ，判断 $f(x)$ 是否存在重因式，并求出重因式(如果存在的话)。

二. (15分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ ，求可逆矩阵 P 和 Q 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，其

中 r 是 A 的秩， I_r 表示 r 阶单位矩阵。

三. (20分) 计算下列矩阵的行列式：

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \cdots & x_{n-1}^3 & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{pmatrix}.$$

四. (20分) (1) 设 a, b 是参数，讨论下列方程组的解的情况：

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2ax_2 + x_3 = 4, \\ bx_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

(2) 设 A, B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵， I_r 表示 r 阶单位矩阵， $\text{rank}(A)$ 表示 A 的秩。证明：

$$\text{rank} \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = m + \text{rank}(I_n - BA).$$

五. (20分) 用 $U_n(\mathbb{R})$ 表示实数域上的 n 阶上三角矩阵的集合。(1) 验证 $U_n(\mathbb{R})$ 与矩阵的加法和数乘构成一个线性空间并给出该线性空间的一组基；(2) 设有 $U_3(\mathbb{R})$ 的变换 A ：

汕头大学 2019 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

$$A: U_3(\mathbb{R}) \rightarrow U_3(\mathbb{R}),$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

验证 A 是线性变换并写出 A 在某组基 (自己选一组基) 下的矩阵.

六. (20 分) (1) 设 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}$ 都是实数, 且 $b_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n-1$. 设

$$T_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & a_3 & b_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}. \quad \text{证明: } T_n \text{ 有 } n \text{ 个互不相同的特征值.}$$

(2) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中 a_{ij} 都是实数, 且 $a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$. 证明:

$\det(A) > 0$ ($\det(A)$ 表示 A 的行列式).

$$\text{七. (15 分) (1) 设 } H_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}, \quad \text{证明 } H_n \text{ 是正定矩阵.}$$

(2) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中 a_{ij} 都是实数, 设对 \mathbb{R}^n 中的任意非零向量 \mathbf{x} , 有 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$. 证明: A 的每个特征值的实部大于 0.

八. (20 分) Cayley-Hamilton 定理如下: 设 A 为 n 阶实数方阵, 其特征多项式为 $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$, 则有

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I_n = O.$$

(1) 设 A 可逆, 利用 Cayley-Hamilton 定理推导 A 的逆阵 A^{-1} 和伴随矩阵 A^* 的表达式 (用 A 的多项式表示).

(2) 证明可逆矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 可逆, 并求 A^* 的逆阵 (用 A 的多项式表示).

(3) 设 $n \geq 2, A^* = A$, 求 A 的行列式.