汕头大学 2020 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：814
科目名称：高等代数
适用专业：数学

考 生 须 知

答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答，答题要写清题号，不必抄原题。

一.（20 分） 解答如下问题:

(1) 已知多项式 $f(x)=x^3-(5+2\mathrm{i})x^2+(11+6\mathrm{i})x-7-4\mathrm{i}$ 有实根，求 $f(x)$ 的全部根.

(2) 设 $f(x)=x^n-1$，其中 n 是正整数. 分别求 $f(x)$ 在复数域和实数域上的因式分解.

二.（15 分）设 n 为正整数，$E=(e_{ij})_{n\times n}$，其中$e_{ij}=1,\ i,j=1,2,\ldots,n$. 设 X 为 n 阶方阵，满足 $X=EX+XE$. 证明: E 为零矩阵.

三.（15 分）设 $A\in R^{n\times n}$，$\alpha=x+y\mathrm{i}$ 是对应 A 的一个复特征值 $\lambda=a+b\mathrm{i}$ 的特征向量，其中$x,y\in R^n,a,b\in R,b\neq 0$.

（1）证明 $\bar{\lambda}=a-b\mathrm{i}$ 也是A的特征值，并求出 $\bar{\lambda}$ 对应的特征向量.

（2）证明 x 与 y 线性无关.

四.（20 分）设有斐波那契数列 $F_0=1,F_1=1,F_2=2,F_3=3,\cdots$ 满足

$$F_{n+1}=F_{n-1}+F_n,n=1,2,\cdots,$$

其关系可以写成矩阵的表达方式

$$\begin{pmatrix}F_n\\F_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{n-1}\\F_n\end{pmatrix},\qquad n=1,2,\cdots$$

（1）用 $\begin{pmatrix}F_0\\F_1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ 的乘幂表示 $\begin{pmatrix}F_n\\F_{n+1}\end{pmatrix}$.

（2）求出通项 $F_n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 的表达式.

五.（20 分）解答下列问题:

(1) 设A为 n 阶方阵，满足 $A^2=2A$. 证明：A 可对角化，即存在可逆的 n 阶方阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

(2) 设A,B为 n 阶方阵，满足 $A^2=2A,B^2=2B$. 证明：如果 $2I_n-A-B$ 为可逆矩阵，则有 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$ （即A,B的秩相同）.

(3) 设n阶非零方阵 A 满足 $A^3=0$. 证明 $I-A$ 为可逆矩阵，求出其逆阵并讨论A能否相似于对角阵.

六.（20分）设有实矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，其系数满足 $a^2+c^2=1, b^2+d^2=1, ab+cd=0$.

（1）证明 $ad-bc=\pm 1$.

（2）证明 $a^2+b^2=1, c^2+d^2=1, ac+bd=0$.

（3）证明 A 的特征值λ可以写为$\lambda=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$的形式，并讨论特征值是实数和复数的条件.

七.（20分）解答如下问题:

（1） 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 3 & 1 \\ & & & 1 & 3 \end{pmatrix}_n$ 为 n 阶方阵（空白处的元为零元）. 证明：A 有 n 个互不相同的实特征值.

（2）设 $S=\{B\in M_n(R): AB=BA\}$ 为与 A 可交换的 n 阶实方阵的集合. 证明 S 是一个线性空间, 并求 S 的维数.

八.（20分）设 $A_n=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}_n$ 为 n 阶方阵（空白处的元为零元）.

（1） 求$\det(A_n)$.

（2） 证明：A_n 是正定矩阵.

（3） 应用伴随矩阵求 A_4 （即 $n=4$ 的情形）的逆矩阵.

（4） 对一般的 n, 求 A_n 的逆矩阵.