

西安建筑科技大学

2019 年攻读硕士学位研究生招生考试试题

(答案书写在本试题纸上无效。考试结束后本试题纸须附在答题纸内交回) 共 1 页

考试科目: _____ (620) 数学分析 _____

适用专业: _____ 数学 _____

一、计算题 (共 6 题, 每题 10 分, 共 60 分)

1、求函数极限或已知极限确定参数。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)},$$

$$(2) \text{ 设 } a, b \text{ 为实数, 确定 } a, b \text{ 的值, 使得 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1 - x} = 3.$$

2、设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$, 其中 n 为正整数, 证明此方程存在惟一正实根 x_n , 并证明当 $a > 1$ 时, 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^a$ 收敛。

3、设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2xy - x^2 + 18 = 0$ 确定的隐函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值。

4、求曲面积分 $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 S 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 与平面 $z = h$ (h 是正常数) 所围空间区域 ($0 \leq z \leq h$) 的表面, 方向取外侧。

5、求圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 被圆锥面 $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ 所截得的有界部分立体 Ω 的体积。

6、设 $f(x)$ 为二阶可导函数, $F(x)$ 为可微函数, a 为正常数, 二元函数 $u = u(x, t)$ 如下定义

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x - at) + f(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(v) dv. \quad \text{求偏导数 } \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

二、证明题 (共 6 题, 每题 15 分, 共 90 分)

7、设 $a > 0, \sigma > 0, a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{\sigma}{a}), a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\sigma}{a_n}), n = 1, 2, \dots$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

8、设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) dx = 0, \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$ 。试证: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ 。

9、设可导函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续,

$$(1) \text{ 求证: } \lim_{n \rightarrow \infty} (3n + 1) \cdot \int_0^1 x^{3n} f(x) dx = f(1);$$

$$(2) \text{ 利用导数定义证明函数 } F(x) = \int_0^{3x} f(t) dt \text{ 是 } [0, +\infty) \text{ 上的可导函数, 且 } F'(x) = 3f(3x).$$

10、若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在开区间 $(0, a)$ 内可导, 且 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 的右极限存在, 求证: 右导数 $f'_+(0)$ 的存在。

11、求证: (1) 函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n + 1} \right)$ 在开区间 $(0, +\infty)$ 内一致收敛;

$$(2) \text{ 函数 } \varphi(x) = \frac{\int_0^x te^t dt}{\int_0^x e^t dt} \text{ 为开区间 } (0, +\infty) \text{ 上的增函数。}$$

12、已知平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$, L 为 D 的正向边界, 试证:

$$(1) \oint_L xe^{\sin y} dy - ye^{-\sin x} dx = \oint_L xe^{-\sin x} dy - ye^{\sin y} dx;$$

$$(2) \oint_L xe^{\sin y} dy - ye^{-\sin x} dx \geq 2\pi^2.$$