西 安 建 筑 科 技 大 学

2020年攻读硕士学位研究生招生考试试题

(答案书写在本试题纸上无效。考试结束后本试题纸须附在答题纸内交回) 共2页

考试科目: （620） 数学分析

一、计算题 （共6题，每题10分，共60分）

1、求函数极限或已知极限求参数

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

（2）设a,b为实数，确定a,b的值，使得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x+b}{\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt}=\dfrac{1}{2}.$

2、设 $f(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} xy(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$，求$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le1\}$.

3、求曲面积分$\iint\limits_\Sigma (y^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是曲面$z=2-x^2-y^2(1\le z\le2)$的上侧。

4、计算$I=\oint\limits_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\,\mathrm{d}x$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$且取其正方向。

5、求平面$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$和柱面$x^2+y^2=1$的交线上到原点距离最近点和最远点。

6、设$z=(x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-\arctan(\frac{y}{x})}$，求$\mathrm{d}z$与$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

二、证明题（共6题，每题15分，共90分）

1、求证：（1） $\dfrac{\arcsin a}{a}<\dfrac{\arcsin b}{b}$，$0<a<b<1$.

（2） $0<\int_1^3\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

2、设$0<a_1<1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2-a_n}}$，$n=1,2,\cdots$，证明数列$\{a_n\}$收敛。

3、设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，在$(0,+\infty)$内二阶可导，且$f(0)=f(1)=0$，

（1）求证：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)+\dfrac{\xi}{2}f'(\xi)=0$.

（2）若$f''(x)>0$，证明对任意$x_1,x_2\in(0,1)$，有$f(x_1)+f(x_2)<f(x_1+x_2)$.

4、(1)设$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上以p为周期的连续周期函数。证明对任何实数a，有$\int_a^{a+p}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^p f(x)\mathrm{d}x$.

（2）设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，而且$f(x)>0$，又$\psi(x)=\int_a^x f(t)\,dt+\int_b^x\dfrac{1}{f(t)}dt$，证明不等式$\psi'(x)\ge2$成立，其中$x\in[a,b]$.

5、(1) 证明：函数列$f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ $(n=1,2,\cdots)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

（2）证明：函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x^2+n^2}\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{n}\right)$在$(0,+\infty)$上一致收敛。

6、设函数$f(x)$在$x=0$连续，且对任意$x,y\in R$，有$f(x+y)=f(x)+f(y)$。证明：(1) f在R上连续；

（2） $f(x)=f(1)x$.