

西安建筑科技大学

2020年攻读硕士学位研究生招生考试试题

(答案书写在本试题纸上无效。考试结束后本试题纸须附在答题纸内交回) 共3页

考试科目: _____ (621) 高等数学与线性代数 _____

一、单项选择题 (共5题, 每题5分, 共25分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^2} =$ 【 】
- (A) $2f''(a)$ (B) $\frac{1}{2}f''(a)$
- (C) $f''(a)$ (D) $-f''(a)$
2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = \tan x - \sin x$ 是 x 的 【 】
- (A) 一阶无穷小 (B) 二阶无穷小 (C) 三阶无穷小 (D) 等价无穷小
3. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^1 f(tx)dt = x$, 则 $f(x) =$ 【 】
- (A) x^2 (B) $2x^2$ (C) $\frac{1}{2}x$ (D) $2x$
4. 已知 \vec{a}, \vec{b} 均为非零向量, 且 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 【 】
- (A) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ (B) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ (C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (D) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
5. A 是 n 阶正交矩阵, 则下列结论不正确的是 【 】
- (A) $A^2 = A$ (B) $|A| = \pm 1$ (C) A^{-1} 也是正交矩阵
- (D) A 的列向量组必是 R^n 的一个标准正交基

二、填空题 (共5题, 每题5分, 共25分)

6. 设 $f(x) = (x^3 + 1)(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7)$, 则 $f^{(8)}(0) =$ _____.
7. 设 $f(x)$ 可导, $y = f(\sin x) + e^{f(x)}$, 则 $dy =$ _____.
8. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\tan x}{x}$, 则 $f(x) =$ _____.
9. 曲线 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} (0 \leq x \leq 1)$ 的弧长 $s =$ _____.
10. 已知 A 为3阶方阵, 且 $|A| = 2$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $|3A^2 A^*| =$ _____.

三、解答题与证明题 (共10题, 每题10分, 共100分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.
12. 试确定常数 a, b 的值, 使得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1 + \tan t^3)}{t} dt} = b \neq 0$.
13. 已知 $\begin{cases} x = \theta(1 - \sin \theta) \\ y = \theta \cos \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{\theta=\pi}$.
14. 设 $f(x)$ 为可微函数, $f(0) = 2$, 且曲线积分 $\int_L yf(x)dx + [f(x) - 2e^{-x}]dy$ 与路径无关, (1) 求 $f(x)$; (2) 将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数.
15. 设 $f(x) = \ln x + \int_1^e f(x)dx$, 求函数 $f(x)$ 的表达式.
16. λ 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ 有唯一解, 无解或无穷多解? 有无穷多解时求出通解.

17. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 证明向量组 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \beta_r = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$ 也线性无关.

18. 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t(x-t)| dt, (0 < x < 1)$. 试求:

(1) $f(x)$ 的单调区间与极值点; (2) $f(x)$ 的凹凸区间与拐点.

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, f'_+(a) \cdot f'_-(b) > 0$, 证明: (1) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$; (2) 存在 $\eta \in (a, b)$, 使得 $f''(\eta) = 0$.

20. 已知

$$P(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, Q(x, y, z) = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, R(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

(1) 当 $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ 时, 求 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$;

(2) 计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} P y dz + Q dz dx + R dx dy$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.