西 安 建 筑 科 技 大 学

2020 年攻读硕士学位研究生招生考试试题

(答案书写在本试题纸上无效。考试结束后本试题纸须附在答题纸内交回) 共 2 页

考试科目: （818）高等代数

一、填空题（共 6 题，每题 5 分，共 30 分）

1. 设 x_1 , x_2 , x_3 为 $f(x)=2x^3+x^2-3x+2$ 的根, 则 $x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2=$__________ 。

2. 多项式 $f(x)=x^3+3x^2+kx+1$ 有重根，则 $k=$ ________。

3. 已知矩阵 $A_{4\times4}$, $|A|=-1$, A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $|(2A)^{-1}-\dfrac{3}{2}A^*|=$__________。

4. 已知 $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=x$, $\varepsilon_3=x^2$ 和 $\eta_1=1$, $\eta_2=1-x$, $\eta_3=(1+x)^2$ 是线性空间 $P_3[x]$ 两组基，则由基 η_1 , η_2 , η_3 到基 ε_1 , ε_2 , ε_3 的过渡矩阵为__________。

5. 设 $f=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$ ，则 f 的正惯性指数为_______ 。

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+3x_2{}^2+3x_3{}^2+2a\mathrm{x}_2x_3$ （其中 $a>0$），通过正交变换化成标准型为 $f=y_1{}^2+y_2{}^2+5y_3{}^2$，则参数 $a=$ ________。

二、(15 分）求向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,4)^T$，$\alpha_2=(1,1,0,2)^T$，$\alpha_3=(0,2,2,4)^T$，$\alpha_4=(1,-1,2,-2)^T$，$\alpha_5=(1,3,-4,6)^T$ 的一个极大线性无关组和秩，并把其余向量用极大无关组线性表示。

三、(15 分）已知实方阵 A 满足 $A^2-A+2E=0$，其中 E 为单位矩阵。

（1）证明 $A+2E$ 可逆并求出其逆矩阵；（2）证明对任意实数 a， $A+aE$ 都是可逆矩阵。

四、(15 分）计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$

五、(20 分）设有三元实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，

（1）记 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$，$Y=(y_1,y_2,y_3)^T$，求正交变换 $X=PY$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

（2）问 a 为何值时， f 正定？

六、(15 分）证明 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$，而 $f^{(k)}(x_0)\neq0$，举例说明“如果 a 是 $f'(x)$ 的 m 重根，那么 a 是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根”是不对的。

七、(15 分）考虑 $P_n[x]$ 上的线性变换

$$D: f(x)\mapsto f'(x), \quad A: f(x)\mapsto f(x+1)$$

若它们在基底下 $(1,x,\dfrac{x^2}{2!},\cdots,\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!})$ 的矩阵分别为 D, A ，证明：

（1） $D^n=O$ （2） $A=E+D+\dfrac{D^2}{2!}+\cdots+\dfrac{D^{n-1}}{(n-1)!}$

八、(10 分）证明: 如果 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个正交变换，那么 σ 的不变子空间的正交补也是 σ 的不变子空间。

九、(15 分）设 V 是实数域 P 上全体 n 阶方阵在通常的运算下构成的线性空间，σ 为 V 上的线性变换，且对任意的 $A\in V$，$\sigma(A)=A^T$

（1）求 σ 的特征值；（2）对每一个特征值，求其对应的特征子空间；

（3）证明 V 恰是 σ 的所有特征子空间的直和。