西安建筑科技大学

2019 年攻读硕士学位研究生招生考试试题

(答案书写在本试题纸上无效。考试结束后本试题纸须附在答题纸内交回) 共 1 页

考试科目: （818）高等代数

适用专业: 数 学

一、填空题（共 6 题，每题 5 分，共 30 分）

1. 设 x_1,x_2,x_3 为 $f(x)=2x^3+x^2-3x+2$ 的根，则

$$x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

2. 设 $g(x)=(x-c)^2, f(x)=x^5-5qx+4r$，则 $g(x)\mid f(x)$ 的条件是________ .

3. 已知矩阵 $A_{n\times n}$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^*=$________.

4. 已知 $\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=x,\varepsilon_3=x^2$ 和 $\eta_1=1,\eta_2=1+x,\eta_3=(1+x)^2$ 是线性空间 $P_3[x]$ 两组基，则由基 η_1,η_2,η_3 到基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的过渡矩阵为________.

5. 已知方阵 A 满足 $A^3+2A^2-A-3E=0$，其中 E 为单位矩阵，则 $(A+E)^{-1}=$______.

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为 ________.

二、（10 分）计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

三、（15 分）设 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，求 $V_1\cap V_2$，V_1+V 的基和维数，其中

$\alpha_1=(2,-1,0,1),\alpha_2=(-1,1,1,1),\alpha_3=(0,1,2,3)$；$\beta_1=(1,0,1,2),\beta_2=(-1,2,3,4)$.

四、（15 分）求齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3-x_4=0\\ x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 解空间（是 R^4 的子空间）的一组标准正交基，并将其扩充为 R^4 的标准正交基.

五、（15 分）设矩阵 A 的伴随矩阵为 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，且 $A^{-1}XA=2XA-3E$，求矩阵 X.

六、（20 分）设 $M_2(F)$ 是数域 F 上一切二阶矩阵所组成的向量空间，对于任意 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(F)$，

定义 $\sigma\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2a-b&-3a\\3d&3c\end{pmatrix}$，

（1）证明 σ 是 $M_2(F)$ 上的线性变换，并且写出 σ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵.

（2）求出 σ 的特征根.

（3）求出 $M_2(F)$ 的一个基，使 σ 在这组基下的矩阵是对角阵.

七、（15 分）设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x),g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)\in P[x]$，证明

$$(f_1(x)\cdots f_m(x),g_1(x)\cdots g_n(x))=1\Leftrightarrow(f_i(x),g_j(x))=1,$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n.$$

八、（10 分）设整系数线性方程组为 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, i=1,2,\cdots,n.$ 证明对任意整数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都有整数解的充分必要条件是系数行列式 $|a_{ij}|=\pm1$.

九、（20 分）设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换，且 $\sigma^2=\sigma$，证明：

（1）$\sigma^{-1}(0)=\{\alpha-\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V\}$.　（2）$V=\sigma^{-1}(0)\oplus\sigma(V)$.

（3）如果 τ 是 V 的线性变换，且 $\sigma^{-1}(0)$，$\sigma(V)$ 都是 τ 的不变子空间，则 $\sigma\tau=\tau\sigma$.