青 岛 科 技 大 学

二〇一六年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

注意事项：1．本试卷共四道大题（共计 26 个小题），满分 150 分；

2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；

3．必须用蓝、黑钢笔或签字笔答题，其它均无效。

* *

一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 设 $f(x)=x^4+ax^2+bx-8\in Q[x]$，如果 1 是 $f(x)$ 的重根，则 $a=$_____，$b=$_____。

2. 若 $\begin{vmatrix} 3a_1 & 9b_1 & 3c_1 \\ a_2 & 3b_2 & c_2 \\ a_3 & 3b_3 & c_3 \end{vmatrix}=45$，则 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=$________。

3. 记矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 19 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}$ 第三列三个位置的代数余子式依次是 A_{13},A_{23},A_{33}，则表达式 $A_{13}+A_{23}+25A_{33}=$________。

4. 设 A, B 满足 $A^2B-A-B=E$，其中 E 是 3 阶单位矩阵，若 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $|B|=$________。

5. t 满足________时，二次型 $x_1^2+2tx_1x_2+4x_2^2+(t-1)x_3^2$ 是正定的。

6. 在线性空间 P^3 中，已知两向量组 $\begin{cases}\alpha_1=(1,2,1,0)\\ \alpha_2=(-1,1,1,1,)\end{cases}$，$\begin{cases}\beta_1=(2,-1,0,1)\\ \beta_2=(1,-1,3,7)\end{cases}$，$L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)$ 的维数是_______。

7. 已知三阶矩阵 A 的特征值分别是 1，-1，2，则 $|A^2-4E|=$______。

8. 在线性空间 P^3 中，线性变换 $\sigma(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,\ x_2,\ x_2\ \ x_3)$，$\sigma$ 在基

$\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=$ $\varepsilon_3=(0,1,0)$，下的矩阵是 ________。

9. 4 级矩阵 A 的初等因子为 $\lambda+1, \lambda-1, (\lambda-2)^2$，则 A 的若尔当标准形为________。

10. 已知 3 维欧氏空间中有一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，其度量矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，向量

$\beta=-2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$，则 $|\beta|=$______。

二、选择题（每小题 3 分，满分 30 分）

1. 若 $(f(x),g(x))=1$，则以下命题为假的是（　　）。

A. $(f^2(x),g^2(x))=1$；

B. 若还有 $(f(x),h(x))=1$，则 $(f(x),g(x)+h(x))=1$；

C. $g(x)\mid f(x)h(x)$，必有 $g(x)\mid h(x)$；

D. $(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$。

2. 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第一行得 B，再将 B 的第 1 列的−1 倍加到第 2 列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则（　　）。

A. $C=P^{-1}AP$；　　B. $C=PAP^{-1}$；

C. $C=P'AP$；　　D. $C=PAP'$。

3. 若 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r\}, S_2=\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_t\}$ 是有限维线性空间 V 的两个线性无关的向量组，且 $r<t$，则（　　）

A. 一定存在 $\beta_h\in S_2$，使得 $S_1\cup\{\beta_h\}$ 仍是线性无关的；

B. 一定不存在 $\beta_h\in S_2$，使得 $S_1\cup\{\beta_h\}$ 仍是线性无关的；

C．可能存在$S_3=\left\{\beta_{j_1},\beta_{j_2},...,\beta_{j_{t-r}}\right\}\subseteq S_2$，使得$S_1\bigcup S_3$是线性无关的

（$1\le j_1<...<j_{t-r}\le t$）;

D． 以上选项都不对。

4.若实系数方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\\a_3x+b_3y=c_3\end{cases}$有解，记$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$，则（　　）。

A．$D>0$；　　B．$D<0$；

C．$D=0$；　　D．D可以是任何实数。

5.向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\beta_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，而$\beta_2$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则必有（　　）。

A．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$线性相关；　　B．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$线性相关；

C．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$线性无关；　　D．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$线性无关。

6.设自然数$m>n>1$，R表示实数域，记$m\times n$型实矩阵$\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$的行向量组为$\left\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m\right\}$，列向量组为$\left\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\right\}$，若它们线性组合的向量空间分别记为

$$S_1=\left\{\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+...+\lambda_m\alpha_m\middle|\lambda_i\in R,i=1,2,...,m\right\},$$

$$S_1=\left\{\gamma_1\beta_1+\gamma_2\beta_2+...+\gamma_n\gamma_n\middle|\gamma_i\in R,i=1,2,...,n\right\}。$$

则维数$\dim S_1$与$\dim S_2$的关系是（　　）。

A．$\dim S_1=\dim S_2$；　　B．$\dim S_1<\dim S_2$；

C．$\dim S_1>\dim S_2$；　　D．没有确定的大小关系。

7.二次型$x^2+2y^2-z^2+4xy-2yz+2xz$的矩阵是（　　）。

A．$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 2 & -1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$；　　B．$\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\2 & 1 & 1\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix}$；

C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；　　　　D．在目前条件下不确定。

8. 设$V_1=\left\{(0,x,0)\middle|x\in R,x\neq 0\right\}$，$V_2=\left\{(x,y,0)\middle|x,y\in R\right\}$，则（　）是$R^3$的子空间。

A. V_1；　　B. V_2；　　C. $V_1\bigcap V_2$；　　D. V_1+V_2。

9. 下列命题为真的是（　　）。

A．线性空间V上的线性变换σ在不同基下的矩阵合同；

B．秩相等的两个矩阵等价；

C．线性变换将线性相关向量组变为线性相关向量组；

D．线性变换将线性无关向量组变为线性无关向量组。

10．设P,Q都是n阶正交矩阵，则下列矩阵仍是正交矩阵的是（　　）。

A．$P+Q$；　　B．$P-Q$；

C．$kP(k\in R)$；　　D．$P^{-1}Q^{-1}$。

三、计算题（满分 40 分）

1．(12 分) 求a与b，使齐次线性方程组$\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+2by+z=0 \\ x+3by+z=0 \end{cases}$有非零解，并求相应的基础解系。

2．（13 分）在线性空间$\mathrm{R}\left[\mathrm{x}\right]_3$中，求基$x+1,x+x^2,x^2$到基$1,x^2-x,x^2+x$的过渡矩阵，并求向量$1+2x+x^2$在基$1,x^2-x,x^2+x$下的坐标。

3．（15 分）已知$P^{2\times2}$的空间$W=\left\{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\middle| x_{11}+x_{22}=0, x_{ij}\in P\right\}$和线性变换

$\sigma(X)=B^TX-X^TB$，$\forall X\in P^{2\times2}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

（1）求W的一组基；

（2）因为W是σ的不变子空间，将σ看成W上的线性变换，求W的一组基，使σ在该基下的矩阵为对角矩阵。

四、证明题（满分 40 分）

1.（13 分）证明$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$。

2.（12 分）设A为$n\times n$矩阵，证明：如果$A^2=E$，那么

$rank(A+E)+rank(A-E)=n$。

3.（15 分）令σ为数域F上n维线性空间V的一个线性变换，且满足条件$\sigma^2=\sigma$，证明：

（1）$Ker(\sigma)=\{u-\sigma(u)\,|\,u\in V\}$；　　（2）$V=Ker(\sigma)\oplus \mathrm{Im}(\sigma)$。