扬州大学

2020 年硕士研究生招生考试初试试题（ A 卷）

科目代码 822　　科目名称 高等代数（理）　　满分 150

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

1.（15 分）设 $V=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x+2y-z=0\}, W=\{(x,y,z)\in R^3 \mid \frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{5}\}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的两个子空间.

（1）求 V 的维数，并给出它的一组基；

（2）求 V 的正交补空间 $V^{\perp}$ 的维数，并给出它的一组基；

（3）$V+W$ 是否为直和，说明理由.

2.（15 分）设多项式 $f(x)=ax^4+bx^3+1, g(x)=(x-1)^2$，且 $g(x)$ 整除 $f(x)$.

（1）求 a,b；

（2）在有理数域上给出 $f(x)$ 的标准分解，说明理由.

3.（15 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & -2 & 3 & 5\end{pmatrix}, \boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & -3\end{pmatrix}$.

（1）证明：$\boldsymbol{AA}^T$ 是可逆矩阵，其中 $\boldsymbol{A}^T$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵；

（2）记 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{AA}^T)^{-1}\boldsymbol{A}$，证明：$\boldsymbol{P}$ 是幂等矩阵（即 $\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{P}$）；

（3）如果 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{MA}$，且 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{BB}^T)^{-1}\boldsymbol{B}$，证明：$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}$.

4.（15 分）设 $\alpha_1=(1,-1,2,4), \alpha_2=(0,3,1,2), \alpha_3=(3,0,7,4), \alpha_4=(2,1,5,6), \alpha_5=(1,-1,2,0)$.

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩；

(2) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 且包含 α_1,α_2 的所有可能的极大线性无关组.

5.（15 分）设 $C^{3\times3}$ 是全体 3 阶复数矩阵组成的集合，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{pmatrix}\in C^{3\times3}$.

（1）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部不变因子；

（2）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当 $(Jordan)$ 标准形矩阵 $\boldsymbol{J}$；

（3）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m_A(\lambda)$.

6.（15 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 是元素 a_{ij} 在行列式$|A|$中的代数余子式.

（1）求行列式$|A|$的值；

（2）求 $\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}A_{ij}$.

7.（15 分）设 A,B 分别是 $m\times n, n\times m$ 矩阵，$R(A)$ 表示矩阵 A 的秩.

（1）如果 $m>n$，证明：行列式$|AB|=0$；

（2）如果 $m=n$，且 $R(A)+R(B)\le n$，证明：存在可逆矩阵 M 使得 $AMB=O$.

8.（15 分）设 4 阶矩阵 A 的秩等于 3，ξ_1,ξ_2,ξ_3 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的三个解向量，且 $\xi_1+2\xi_2+\xi_3=(4,0,8,0)^T,\xi_1+2\xi_3=(0,3,0,6)^T$.

（1）求线性方程组 $AX=\beta$ 的通解；

（2）如果存在 4 阶矩阵 B，使得 $AB=(\beta,\beta,\beta,\beta)$，则矩阵 B 的秩的最大值是多少？证明你的结论.

9.（15 分）设 $V=P^{n\times n}$ 是数域 P 上的矩阵空间，$A\in V$，$\sigma(A)=A^T$.

（1）证明：σ 是 V 上的线性变换；

（2）求 σ 的全部特征子空间；

（3）证明：存在一组基使得 σ 在这组基下的矩阵是对角形矩阵.

10.（15 分）设 A 是 n 阶的实数矩阵. 证明：

（1）若矩阵 A 的行列式$|A|<0$，则存在 n 维实向量 α 使得 $\alpha^T A\alpha<0$；

（2）若对于任意的 n 维非零实向量 α，都有 $\alpha^T A\alpha>0$，则有 $|A|>0$；

（3）若 $A+A^T$ 是正定矩阵，则有 $|A|>0$.