机密★启用前

四川轻化工大学2020年研究生招生考试业务课试卷

（满分：150分，所有答案一律写在答题纸上）

适用专业：0701 数学

考试科目：808 高等代数 A 卷

考试时间：3 小时

一、填空题（每题5分，共30分）

1、n级排列 $j_1\ j_2\cdots j_n$ 的逆序数为m，则排列 $j_n\ j_{n-1}\cdots j_1$ 的逆序数为__________。

2、设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$，则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}=$__________（其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式）。

3、设方阵 A_n，B_n 均可逆，且 $|A|=a$，$|B|=b$，则 $\dfrac{\begin{vmatrix}A^* & 0\\ 0 & B^*\end{vmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}^*\right|}=$__________。

4、已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\ 4x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$ 是正定二次型，则参数λ的取值范围为____________________。

5、已知n阶矩阵A的特征值为$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ $(\sigma_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$，则$|A^{-1}|=$______________。

6、线性空间 $\mathbb{R}^4$ 中，内积定义为 $(\alpha,\beta)=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3+4a_4b_4$，其中 $\alpha=(a_1,a_2,a_3,a_4)^T$，$\beta=(b_1,b_2,b_3,b_4)^T$，则当 $k=$________ 时，向量 $(2,0,1,3)^T$ 与向量 $(1,-2,1,k)^T$ 正交。其中 α^T 表示向量α 的转置。

二、计算题（共84分）

1、（14分）设4阶方阵A,B,C满足方程 $(2E-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$，试求矩阵A，

其中 $B=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$。

2、（12分）设α为三维列向量，且$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，计算$\alpha^T\alpha$。

3、（14分）$V=\{A\in P^{n\times n}\,|\,tr(A)=0\}$（其中$tr(A)$表示矩阵$A$的迹）对于矩阵的加法和数乘构成$P$上的线性空间，试求$V$的维数和一组基。

4、（14分）讨论a取不同的值时，线性方程组$\begin{cases}x+y+z=a\\ax+y+z=1\\x+y+az=1\end{cases}$的解的情况，有解时求出它的全部解。

5、（15分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+Cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为2，

（1）求参数C及此二次型对应的矩阵的特征值；

（2）指出方程$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示何种二次曲面。

6、（15分）已知$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$，求$x,y$满足什么条件时$A$与对角阵相似。

三、证明题（共36分）

1、（18分）已知A,B,C,D为n阶方阵，$AC=CA, AD=CB, |A|\neq 0$，若$G=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$，

证明：

$$n\le rank(G)<2n$$

2、（18分）设α是欧氏空间V的一个非零向量，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in V$满足条件

$$(\alpha_i,\alpha)>0,\quad (\alpha_i,\alpha_j)\le 0\quad (i,j=1,2,...,n;\ i\neq j)$$

证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关。