# 广东财经大学硕士研究生入学考试试卷

考试年度 2021　　考试科目代码及名称 807-高等代数（自命题）

适用专业 071400 统计学

[友情提醒：请在考点提供的专用答题纸上答题，答在本卷或草稿纸上无效！]

## 一、填空题 (10 题，每题 3 分，共 30 分)

1. 多项式 $f(x) = x^4 - 2x + 5$ 除以 $2x - 4$ 所得的余式为 ____________.

2. 设 $A$ 为 3 阶方阵，$|A| = 2$, 把 $A$ 按列分块为 $(A_1, A_2, A_3)$, 其中 $A_j(j = 1, 2, 3)$ 是 $A$ 的第 $j$ 列，则 $|A_3 - 2A_1, A_1, 3A_2| =$ ____________.

3. 设 $A$ 为非奇异矩阵，$A^*$ 为 $A$ 的伴随矩阵，那么 $A^* =$ ____________.

4. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 $B$ 满足 $BA = B + 2E$, 则 $|B| =$ _____.

5. 设 $\alpha = (1, 2, 1, 3)^T, \beta = (1, 0, -1, 2)^T$, 那么齐次线性方程组 $\alpha\beta^T x = 0$ 的基础解系包含 ____________个线性无关的解向量.

6. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 4x_2^2 + ax_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$ 是正定的，则 $a$ 的取值范围为 ____________.

7. 设 $V_1, V_2$ 是 $V$ 的子空间，$\dim V_1 = \dim V_2 = m$, $\dim(V_1 \cap V_2) = m - 1$, 则 $\dim(V_1 + V_2) =$ ____________.

8. 设 3 阶矩阵 $A$ 的特征值为 $2, 3, \lambda$. 若行列式 $|\frac{1}{2}A| = 6$，则 $\lambda =$ ____________.

9. 设 $\alpha_1 = (1, 2, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 3, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 4, 0, 1)^T, \alpha_4 = (1, 5, 1, 0)^T$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩等于 ____________.

10. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{bmatrix}$, $a_i \neq a_j, (i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4)$,$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 则线性方程组 $A^T x = B$ 的解用向量表示为 ____________.

## 二、计算题 (6 题，每题 10 分，共 60 分)

1. 已知 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$, $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $(f(x), g(x))$ 表示 $f(x), g(x)$ 的首项系数等于 1 的最大公因式. 计算 $(f(x), g(x))$, 并求 $u(x), v(x)$ 使得 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.

2. 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} x_1+m & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2+m & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3+m & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4+m \end{vmatrix}$$

3. 已知 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$, 计算矩阵 $X$.

4. 已知 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $A^{-1}$.

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维向量空间 $R^3$ 的一组基，计算：从基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵.

6. 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, 计算 $A$ 的特征值和特征向量.

## 三、应用题 (3 题，每题 15 分，共 45 分)

1. 计算：$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2020} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{2021}$

2. 已知三元线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$ 有无穷多个解.

   (1) 确定 $b$ 的值；

   (2) 计算方程组的通解.

3. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3$ 的秩等于 2. 试求：

   (1) $a$ 的值；

   (2) 非退化线性替换，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形.

## 四、证明题 (1 题，每题 15 分，共 15 分)

1. 证明：$(E-2A)^{-1}=E+2A+4A^2+8A^3$ 的充要条件是 $A^4=O$.