

2021 年硕士研究生招生考试（初试）试题

科目代码： 601

科目名称： 高等数学

说明： 1. 本试题为招生单位自命题科目。

2. 所有答案必须写在答题纸上，写在本试题单上的一律无效。

3. 考生答题时不必抄题，但必须写明题号。

4. 本试题共计四大题，满分 150 分。

【本试题共计 3 页，此为第 1 页】

一、单选题：（共 20 分，每小题 4 分）

1. 设函数 $f(x) = \frac{x^3 - x}{\sin(\pi x)}$ ，则函数 $f(x)$ ()。

A、有无穷多个可去间断点

B、只有一个可去间断点

C、有两个可去间断点

D、有三个可去间断点

2. 函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ，则函数在 $(0, 0)$ 处 ()。

A、连续，偏导数存在

B、连续，偏导数不存在

C、不连续，偏导数存在

D、不连续，偏导数不存在

3. 曲面 $x^2 - 2y^2 + z^2 - xyz - 4x + 2z = 6$ 在点 $(0, 1, 2)$ 处的切平面方程为()。

A、 $3(x-1) + 2(y-2) - 3z + 11 = 0$

B、 $3x + 2y - 3z = 4$

C、 $\frac{x}{3} + \frac{y-1}{2} + \frac{z-2}{-3} = 0$

D、 $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$

4. 下列级数中，条件收敛的是()。

A、 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{\sqrt{2n^3 + 4}}$

B、 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

C、 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$

D、 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n2^n}$

5. 设 $y_1(x)$ 是方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的一个特解， C 为任意常数，则该方程的通解是 ()。

考试科目代码: 601 考试科目名称: 高等数学

- A、 $y = y_1 + e^{-\int p(x)dx}$ B、 $y = y_1 + Ce^{-\int p(x)dx}$
 C、 $y = y_1 + e^{-\int p(x)dx} + C$ D、 $y = y_1 + e^{\int p(x)dx}$

二、填空题: (共 20 分, 每小题 4 分)

- 关于曲线 $y = x^2 \ln x$ 在区间 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上的一段凹凸性的正确判断是_____。
- $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos x + x^{2021} |\sin x|) dx =$ _____。
- 设向量 $\vec{a} = \{\lambda, -3, 2\}$ 与 $\vec{b} = \{1, 2, -\lambda\}$ 垂直, 则 $\lambda =$ _____。
- L 为圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $\oint_L x^2 ds =$ _____。
- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ 的收敛域是_____。

三、计算题: (共 90 分, 每小题 10 分)

- 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x(e^{3x} - 1)}$ 。
- 设 $y = y(x)$ 由方程 $\cos(xy) + 2x - y = 1$ 所确定, 求 $y''(0)$ 。
- 求不定积分 $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx$ 。
- 过原点作曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 的切线, 求该切线与曲线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积。
- 求函数 $z = x^2 - y^3 + 2xy + y + 2$ 的极值。
- 计算二重积分 $\iint_D xy^2 dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 5, x-1 \geq y^2$ 。
- 设 C 是正向圆周 $x^2 + y^2 = 4$, 求 $I = \oint_C (y^3 + 3xy + 5) dx - (x^3 - 2xy + 1) dy$ 。
- 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$ 在 $y|_{x=0} = 1$ 的解。
- 求微分方程 $y'' - 4y = x + 1$ 的一个特解。

四、证明题: (共 20 分, 每小题 10 分)

1. 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 有 $n+1$ 个不同的零点, 试证明 $f(x) \equiv 0$.
2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 试证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^{1+\alpha}}$ ($\alpha > 0$) 必绝对收敛.