

中国科学院大学

2020 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称: 数学分析

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分, 全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试题纸上或草稿纸上均一律无效。

1 (本题满分 15 分) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x^4} - \sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$.

2 (本题满分 15 分) 设 $x_0 = \alpha, x_1 = \beta, x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1} (n \geq 1)$.
证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出极限值.

3 (本题满分 15 分) 判断下列极限是否存在, 并说明理由:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{\sin x} \sin \frac{1}{x} \cos t^2 dt.$$

4 (本题满分 15 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, n]$ (n 是一个正整数) 上连续, 并且 $f(0) = f(n)$, 证明: 存在点 $x_0 \in [0, n-1]$ 使得 $f(x_0) = f(x_0+1)$.

5 (本题满分 15 分, 其中题 (1) 满分 8 分, 题 (2) 满分 7 分) 计算:

$$(1) I_1 = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a, b > 0). \quad (2) I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

6 (本题满分 15 分) 设 \mathcal{D} 是 Oxy 平面内由曲线 $y = \sqrt{x}$ 和直线 $y = x$ 所围成的图形, 求 \mathcal{D} 绕直线 $y = x$ 旋转产生的旋转体体积.

7 (本题满分 15 分) 求函数 $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5R^2 (x, y, z > 0)$ 上的最大值.

8 (本题满分 15 分) 证明:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi < \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x - x^2}} dx < \pi.$$

9 (本题满分 15 分) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n} x^n$ 的敛散性.

10 (本题满分 15 分) 证明:

$$\left| \int_{100}^{200} \frac{x^3}{x^4 + x - 1} dx - \ln 2 \right| < \frac{1}{3} \cdot 10^{-6}.$$