中国科学院大学
2020年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（甲）

考生须知：

1．本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。

2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、选择题 (本题满分 50 分，每小题 5 分。请从题目所列的选项中选择一个正确项填充空格。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。请将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。)

1. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{4}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{2n}{n^2+n-1}\right)$ 的值为(　)。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. $+\infty$

2．设$f(x)$在$x=a$处连续，$F(x)=f(x)|x-a|$，则$f(a)=0$是$F(x)$在$x=a$处可导的(　)。

A．充要条件　　B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件　　D. 既非充分又非必要条件

3. 极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{1-\sin x}}$ 的值为(　)。

A. e^{-1}　　B. 1　　C. e　　D. $+\infty$

4．设周期函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，周期为4，又$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线$y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的切线斜率为(　)。

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. -1　　D. -2

5. 设向量$\vec{a}=(1,2,2)$，　$\vec{b}=(0,1,2)$，则向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$方向上的投影向量为(　)。

A. $\left(0,\dfrac{6}{5},\dfrac{12}{5}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$　　D. $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$

6. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是（　）。

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,\mathrm{y})-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

D. $\lim\limits_{x\to 0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$.

7. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)}=$（　　）。

A．0　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．1

8. 设方程 $x+y+z=e^{xy}$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 的表达式是（　　）。

A．$(x^2+y^2)\mathrm{e}^{xy}$　　B．$(x+y)\mathrm{e}^{xy}$

C．$2xy\,\mathrm{e}^{xy}$　　D．$(1+xy)\mathrm{e}^{xy}$

9. 设 $a_0=3$，$a_1=5$，且对任何自然数 $n>1$ 有 $na_n=\dfrac{2}{3}a_{n-1}-(n-1)a_{n-1}$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为（　）。

A．$\dfrac{2}{3}$　　B．1　　C．$\dfrac{3}{2}$　　D．2

10. 下列反常积分发散的是（　）。

A．$\int_0^{+\infty}\dfrac{x^6}{1+e^x}dx$　　B．$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

C．$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^4\ln x}dx$　　D．$\int_1^{+\infty}\dfrac{2\sin^2 x}{1+x^2}dx$

二、**（本题满分 10 分）**已知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，而 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在，并且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+xf(x)}-1}{\sin x}=3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 。

三、**（本题满分 10 分）**两平面均通过点 $A(-2,1,-1)$ ，其中一个平面通过 x 轴，另一个平面

通过直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ ，求两平面夹角的余弦。

四、（本题满分 10 分）设函数$y=f(x)$由$\begin{cases} x^x+tx-t^2=0, \\ \arctan(ty)=\ln(1+t^2y^2) \end{cases}$确定，求$\frac{dy}{dx}$。

五、（本题满分 10 分）已知函数 $u=f(r), r=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$，求 $f(x)$ 的表达式。

六、（本题满分 10 分）设曲线 C: $y=x^3+2x$ 与其在（1，3）点处的切线以及 x 轴围成的区域落在第一象限中的部分为 D，计算：

（1）D 的面积；

（2）D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

七、（本题满分 10 分）计算下列第二型曲面积分：

$$\iint_S xdydz+2y^4dxdz+3z^6dxdy,$$

其中 S 是椭球面：$x^2+4y^2+9z^2=1$。

八、（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 是周期为 3 的连续函数，证明：在任意长度为 2 的闭区间 $[a,a+2]$ 上至少存在一点θ ，使得 $f(\theta)=f(\theta+1)$。

九、（本题满分 10 分）设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f(a)=f(b)=g(a)=0$. 证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)g(\xi)+2f'(\xi)g'(\xi)+f(\xi)g''(\xi)=0$。

十、（本题满分 10 分）设 f 是[0,1]上的连续函数，满足$\int_0^x f(t)dt \ge 0$对所有的$x\in[0,1]$成立

且$\int_0^1 f(t)dt=0$。证明：$\int_0^1 xf(x)dx\le 0$。

十一、（本题满分 10 分）求证：若正数x, y, z满足$x^2+y^2+z^2=a$，其中$a>0$，则有不等

式$x^3+y^3+z^3\ge\dfrac{a\sqrt{3a}}{3}$恒成立。