中国科学院大学
2020年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：数学专业综合

考生须知:

1. 本试卷满分为150分，全部考试时间总计180分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

试题总分值为540分，其中复分析、拓扑学、实分析、代数、微分几何、概率论各部分试题小计分值均为90分。

考生需在**试题中任意选做分值和不超过150分**的试题并明确标示。

如果选做的试题分值和超过限制，判卷将按照所选做试题的题号顺序依次判卷直到所做题目分值和超过限制的题目的前一题，后面所做试题视作无效考试内容。

复分析

1. (10分) 求将上半单位圆映为上半平面的共形映射。

2. (10分) 求方程 $z^4-5z+1=0$ 在单位圆内以及圆环 $\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<2\}$ 内根的个数。

3. (20分) 计算以下积分。
   (1) $\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+2}$.
   (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx\ (m>0)$.

4. (20分) 设 $f(z)$ 是整函数，且
$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)}{r^n}<+\infty,$$
   其中 $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$。证明 $f(z)$ 是次数不超过 n 的多项式。

5. (15分) 设 $f(z)$ 是单位圆 $\mathbb{D}$ 到自身的解析函数。令：
$$[z,w]=\frac{z-w}{1-\bar{w}z},\quad f^*(z,w)=\frac{[f(z),f(w)]}{[z,w]},\quad z,w\in\mathbb{D}.$$
   证明：$|f^*(z,w)|\le 1$，等号成立当且仅当 $f(z)$ 是 $\mathbb{D}$ 上的共形映射。

6. (15分) 设 $f(z)$ 在 $|z|\le R$ 上解析，且 $|f(z)|\le M$，$f(0)\neq 0$。证明当 $|z|\le\frac{R}{3}$ 时，$f(z)$ 的零点个数不超过
$$\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{M}{|f(0)|}.$$

拓扑学

1. (15分) 已知拓扑空间之间的一个连续映射 $f: X \to Y$. 证明

   i) 如果 X 紧致，则子空间 $f(X) \subseteq Y$ 紧致；

   ii) 如果 X 连通，则子空间 $f(X) \subseteq Y$ 连通.

2. (15分) 对于拓扑空间 X. 考虑对角映射

$$\Delta : X \to X \times X,\ \Delta(x) = (x, x),\ x \in X.$$

   证明 X 满足第二分离性公理的充要条件是, 子空间 $\Delta(X) \subset X \times X$ 是闭子空间。

3. (15分) 设 M 是Mobius带, D 是 2 维闭圆盘。

   i) 将 M 沿它的中线剪开, 得到什么曲面?

   ii) 将 M 的边界 $\partial M = S^1$ 与 D 的边界 $\partial D = S^1$ 用圆周 S^1 的恒同映射粘接，得到什么曲面?

   iii) 粘合空间 $M/\partial M$ 同胚于哪个空间?

4. (15分) 画出环面 $T = S^1 \times S^1$, 写出该曲面的基本群，并标明其生成元。

5. (15分) 写出两个空间同伦等价的定义。证明同伦等价的两个空间具有同构的同调群。

6. (15分) 证明 Brouwer 不动点定理：对于 n 维闭球体 D^n 的一个连续自映射 $f : D^n \to D^n$, 方程 $f(x) = x,\ x \in D^n$, 存在一个解。

实分析

1. (20分) 假设 μ 是 X 上的正测度, $f : X \to [0, \infty]$ 是可测的, $\int_X f\, d\mu = c$, 其中 $0 < c < \infty$, α 是一个常数. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log[1 + (f/n)^\alpha]\, d\mu = \begin{cases} \infty & \text{若 } 0 < \alpha < 1, \\ c & \text{若 } \alpha = 1, \\ 0 & \text{若 } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

2. (20分) 设 f 是 X 上的复可测函数, μ 是 X 上的正测度. 假定 $\|f\|_\infty > 0$, 且对某个 $r < \infty$, $\|f\|_r < \infty$ 成立. 证明: 当 $p \to \infty$ 时,

$$\|f\|_p \to \|f\|_\infty.$$

3. (15分) 证明: 在希尔伯特空间 H 中, 每一个非空闭凸集 E 都包含唯一的一个具有最小范数的元素.

4. (15分) 假设 $f : I \to \mathbb{R}^1$ 是 AC 的, $I = [a, b]$, 定义

$$F(x) = \sup \sum_{i=1}^{N} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \quad (a \le x \le b),$$

其中, 上确界取遍所有的 N 及所有满足

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x$$

的序列 $\{t_i\}$, 证明: f的全变差函数 F,以及$F+f$, $F-f$ 均为 I上非递减的绝对连续函数.

5. (20分) 设 $f \in L^1([0,+\infty))$, $a > 0$, 证明:

$$\int_0^{+\infty} \sin ax \int_0^{+\infty} f(y)e^{-xy}\, dydx = a\int_0^{+\infty} \frac{f(y)}{a^2+y^2}\, dy.$$

代数

1. (15分) 设 $k = \mathbb{F}_q$ 为 q 元有限域， V 为 4 维 k-线性空间。问题： V 的二维 k-子空间有多少个？

2. (15分) 设 G 为正方体的刚体变换群 (即多有的保持正方体的空间刚体运动组成的群)。试证明： $G \cong S_4$，四元全对称群。并写出该群在正方体上的作用决定的 3 维表示的特征标。

3. (20 分) (1) 什么是分裂域 (splitting field)？

   (2) 设 p 为素数， q 为 p 的方幂， $k = \mathbb{F}_p$。则 L 是 k 上 $X^q - X$ 的分裂域，当且仅当 L 为 q 元有限域。特别地，所有 q 元有限域同构。

4. (20 分) 试证明：整数环上的一元多项式代数 $\mathbb{Z}[X]$ 的素理想为： (1) (0)； (2) (p)， (p 为素数)； (3) $(f(X))$， ($f(X)$ 为 $\mathbb{Z}[X]$ 中的不可约多项式)； (4) $(p, f(X))$， (p 为素数， $f(X)$ 模 p 之后为 $\mathbb{F}_p[X]$ 中的不可约多项式)。

5. (20 分)设 p 为素数， G 为有限群。 P 为 G 的 Sylow p-子群。 $N = N_G(P)$。这里，

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

   则 $N = N_G(N)$。

微分几何

1. (15分) (1) 判断球面 $r = r(u,v) = (a\cos u \cos v,\ a\cos u \sin v,\ a\sin u)$, $-\pi/2 < u < \pi/2,\ 0 < v < 2\pi$ 能否与一平面区域建立起等距变换并说明理由。

   (2) 证明高斯曲率 $K \equiv 0$ 的连通极小曲面必为平面的一部分。

2. (25分) 设 $a > 0, b \neq 0$ 为常数。考查曲面片

$$r = r(u,v) = (a\cos u,\ a\sin u,\ bv),$$
$$0 < u < 2\pi,\ -\infty < v < +\infty,$$

   上的曲线

$$\gamma(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt),\ 0 < t < 2\pi.$$

   (1) 求曲线 γ 的曲率和挠率。

   (2) 设$t_0 \in (0, 2\pi)$. 求曲面在 $\gamma(t_0)$ 处沿切向量 $\gamma'(t_0)$ 的法曲率。

   (3) 判断曲线 γ 是否为曲面上的测地线并说明理由。

3. (20分)在球面 $r = r(u,v) = (a\cos u\cos v,\ a\cos u\sin v,\ a\sin u)$, $-\pi/2 < u < \pi/2$, $0 \le v \le 2\pi$ 上，考虑纬圆 $C(v) := r(u_0, v)$, $0 \le v \le 2\pi$ ，这里 $u_0 \in (0, \pi/2)$. 计算沿曲线 C 其测地曲率 k_g 的积分 $\oint_C k_g ds$.

4. (30分) 设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中的一正则曲面片，可以参数化为 $r = r(u,v)$. 则 $\{r_u, r_v, n\}$ 为其自然标架场，这里 n 为单位法向量场。对任意一点 $p \in M$，记
$$\mathcal{W} : T_pM \to T_pM$$
为Weingarten 变换。

(1) 设变换 $\mathcal{W}$ 满足：
$$\mathcal{W}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}.$$
求矩阵A.（用第一、第二基本形式的系数表出。）

(2) 证明下式成立：
$$\frac{D}{dv}\frac{D}{du}r_u - \frac{D}{du}\frac{D}{dv}r_u = K \cdot |r_u \wedge r_v| \cdot \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u),$$
这里 $\frac{D}{du}, \frac{D}{dv}$ 是求协变导数， K 是高斯曲率，$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u)$是将 r_u 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 所得的向量，也即
$$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u) = |r_u| \cdot \frac{(r_v)^\perp}{|(r_v)^\perp|},$$
其中
$$(r_v)^\perp := r_v - \left\langle r_v, \frac{r_u}{|r_u|} \right\rangle \cdot \frac{r_u}{|r_u|}.$$

概率论

1. (10分) 某班有N 个士兵，每人各有一支枪，这些枪外形完全一样，在一次夜间紧急集合中，若每人随机的取走一支枪，问至少有一个人拿到自己的枪的概率.

2. (10分) 设$\Omega = \{r \in \mathbb{Q} : r \in [0,1]\}$ 为$[0,1]$ 上的有理数集, $\mathcal{A}$ 为其上代数, 其中每个集合都是有限个互不相交的如下形式的集合A 的并:$\{r : a < r < b\}$, $\{r : a \le r < b\}$, $\{r : a < r \le b\}$, $\{r : a \le r \le b\}$, $0 \le a \le b \le 1$, 且如果$B = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为如上形式集合A_i 的有限不交并，则$P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$, 其中$a_i, b_i$ 分别为集合A_i 的左右端点, 证明集函数$P(A), A \in \mathcal{A}$ 是$\mathcal{A}$ 上的有限可加集函数，但不是可数可加的.

3. (15分) 令
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$
$$g(x) = \begin{cases} cos(x), & |x| < \pi \\ 0, & |x| \ge \pi \end{cases},$$
$$p(x,y) = \phi(x)\phi(y) + \frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}g(x)g(y), \quad -\infty < x, y < \infty,$$
则关于$p(x,y)$ 试证明：(1)是二元概率密度函数, (2)边际分布都是正态分布, (3)相关系数为0, (4)两个边际分布不独立, (5)不是二元正态密度函数.

4. (15分) 若$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 为正的独立随机变量, 服从相同分布, 密度函数为$p(x)$, 试计算$k \le n$ 时:

$$E\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_k}{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}\right).$$

5. (15分) 设有k 种不同的优惠券, 每次收集到第i 种优惠券的概率为p_i, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$, 且每次收集之间是相互独立的. 若共收集了$n$ 张优惠券, 那么优惠券的种类的期望是多少?(即求收集到n 张优惠券后, 至少是1张的优惠券种类数的期望)

6. (15分) 称随机过程$\{N_t, t \in R_+\}$为强度为λ的Poisson过程(轨道右连续), 若$P(N_0 = 0) = 1$, $\{N_t, t \in R_+\}$为独立增量过程, 且$\forall s < t$, $N_t - N_s$服从均值为$\lambda(t-s)$的Poisson分布. 以W_r记其第r 个跳跃发生的时刻, 亦即事件$\{W_r \le t\}$ 发生表明第r 个跳跃出现的时刻小于等于t, 从而$\{W_r \le t\} = \{N_t \ge r\}$. 求随机变量$W_r$ 的分布函数$F(t) = P(W_r \le t)$ 及概率密度函数$p(t)$.

7. (10分) 设某种原件的寿命(单位:天)是一个随机变量,其密度函数:

$$f(x) = 2x, \qquad 0 < x < 1.$$

当一个原件失效后, 立即用新的原件替换.用X_i 表示第i 个原件的寿命, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$表示第$n$ 个原件的失效时刻, 失效率r 定义如下:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{S_n}.$$

假设随机变量$\{X_i, i \ge 1\}$ 相互独立, 求出失效率r.