中国科学院大学
2020年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（丙）

考生须知：

1．本试卷满分为150分，全部考试时间总计180分钟。

2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、选择题 (本题满分60分，每小题6分。请从题目所列的选项中选择一个正确项填充空格。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。请将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。)

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则下列说法正确的是（　）。

A. $f(0)=0$ 且 $f_-'(0)$ 存在　　　　B. $f(0)=1$ 且 $f_-'(0)$ 存在

C. $f(0)=0$ 且 $f_+'(0)$ 存在　　　　D. $f(0)=1$ 且 $f_+'(0)$ 存在

2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=$（　）。

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

3. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是（　）。

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

D. $\lim\limits_{x\to 0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$.

4. 已知 D 是以 c 为半径，坐标原点为圆心的圆，则 $\iint\limits_D |xy|dxdy$ 的值为（　）。

A. 0　　B. $\dfrac{c^2}{2}$　　C. $\dfrac{c^4}{2}$　　D. $\dfrac{c^4}{4}$

5. 设方程$x+y+z=e^{xy}$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$的表达式是（　）。

A. $(x^2+y^2)\mathrm{e}^{xy}$　　　　B. $(x+y)\mathrm{e}^{xy}$

C. $2xy\,\mathrm{e}^{xy}$　　　　D. $(1+xy)\mathrm{e}^{xy}$

6. 设$a_0=3$，$a_1=5$，且对任何自然数$n>1$有$na_n=\dfrac{2}{3}a_{n-1}-(n-1)a_{n-1}$，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径为（ ）。

A. 1　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

7. 若反常积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^a(1+x)^b}dx$收敛，则（　）。

A. $a<1$且$b>1$　　　　B. $a>1$且$b>1$

C. $a<1$且$a+b>1$　　　　D. $a>1$且$a+b>1$

8. 根据行列式的定义，$f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}$中$x^3$的系数为（　）。

A. 2　　B. 1　　C. −2　　D. −1

9. 设A、B是3阶方阵，且$|A|=4$，$|B|=3$，则$|3A^TB^2|$的值为（　）。

A. 108　　B. $\dfrac{27}{4}$　　C. 972　　D. 324

10. 设$\alpha=(1\quad 0\quad -1)^T$，矩阵$A=\alpha\alpha^T$，$n$为正整数，$|aI-A^n|$为（　）。

A. $a^2(a-2^n)$　　B. a^2　　C. $a-2^n$　　D. $2^2(a-2^n)$

二、（本题满分10分）求矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

（1）特征值、特征向量；
（2）并判定所对应的特征向量是否正交？

三 （**本题满分 10 分**） 已知三阶方阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}, B=(b_{ij})_{3\times 3}$，计算下式：

（1） $A^*=A^T$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵。若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数，求 a_{13}。

（2）若矩阵 A,B 等价，$|A|=0$，求 $|B|$。

四、（**本题满分 10 分**）有线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$

（1） a,b 取何值时方程组无解？

（2） a,b 取何值时方程组有解，并写出其全部解。

五、（**本题满分 10 分**）

已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-3\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}5\\0\\15\\-10\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}-2\\1\\-6\\5\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}2\\0\\5\\-4\end{bmatrix}$$

（1） 求向量组的秩和一个极大线性无关组；

（2） 把不属于极大线性无关组的向量用极大线性无关组线性表示。

六、（**本题满分 10 分**）设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点（1, 0）处有公共切线，计算

$\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{n}{n+2})$。

七、（**本题满分** 10 **分**）设数列 $\{a_n\}$ 有界，且满足条件：$a_n \le a_{n+2}$，$a_n \le a_{n+3}$，$n\in N_+$。证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

八、（**本题满分 10 分**） 求由曲线 $r=3\cos\theta$ 与曲线 $r=1+\cos\theta$ 所围图形的公共部分的面积。

九、（**本题满分 10 分**）已知函数 $u=f(r)$ 且 $r=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$，求 $f(x)$ 的表达式。

十、（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，$f(a)=f(b)=0$ 且有 $\int_a^b f^2(x)dx=1$。请证明：不等式 $\frac{1}{4}<\int_a^b [f'(x)]^2dx\int_a^b x^2 f^2(x)dx$。