

昆明理工大学 2021 年硕士研究生招生入学考试试题(A 卷)

考试科目代码： 843

考试科目名称： 高等代数

考生答题须知

1. 所有题目(包括填空、选择、图表等类型题目)答题答案必须做在考点发给的答题纸上,做在本试题册上无效。请考生务必在答题纸上写清题号。
2. 评卷时不评阅本试题册,答题如有做在本试题册上而影响成绩的,后果由考生自己负责。
3. 答题时一律使用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答(画图可用铅笔),用其它笔答题不给分。
4. 答题时不准使用涂改液等具有明显标记的涂改用品。

一、填空题:(每题 4 分,共 40 分)

1、设 $f(x) = x^4 - 2x + 5$, $g(x) = x^2 - x + 2$, 则 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商是_____ , 余式是_____。

2、设 5 阶方阵 A 的行列式 $|A| = 2$, 则 $|2A^* - 4A^{-1}| =$ _____。

3、设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $|A^2| =$ _____。

4、已知向量组 $\vec{\alpha}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{\alpha}_2 = (2, 0, t)$, $\vec{\alpha}_3 = (0, -4, 5)$ 的秩为 2, 则 $t =$ _____。

5、设矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 且矩阵 A 与 B 相似, 则 $A - 2E_3$ 的秩为_____。

6、设 W_1 是 $R^{n \times n}$ 的一个子空间, 且 W_1 是由全体 n 阶实下三角矩阵构成, 则 W_1 的维数等于_____。

7、设四元非齐次线性方程组 $AX = \vec{b}$ 的系数矩阵 A 的秩为 3, 且已知它的两个解分别为 $\vec{\eta}_1$, $\vec{\eta}_2$, 则该方程组的通解为 $X =$ _____。

8、设线性空间 $V = L\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)\}$, 其中

$$f_1(x) = 1 + 4x - 2x^2 + x^3, f_2(x) = -1 + 9x - 3x^2 + 2x^3, f_3(x) = -5 + 6x + x^3,$$

$f_4(x) = 5 + 7x - 5x^2 + 2x^3$, 则线性空间 V 的基为_____ , 维数是_____。

9、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 6 & -6 & b \end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4$, 则 $a =$ _____ , $b =$ _____。

昆明理工大学 2021 年硕士研究生招生入学考试试题

10、已知三阶实对称方阵 A 有特征值 $1, 1, 2$ 且 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是属于 2 的特征向量，则 A 的属于 1 的线性无

关的特征向量是_____。

二、证明题：（每题 10 分，共 30 分）

1、证明 $f(x) = x^p + px + 1$ (p 为素数) 在有理数域上不可约。

2、证明如果 A 是 $n \times n$ 矩阵 ($n \geq 2$)，那么 A^* 的秩 $r(A^*)$ 为

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n - 1, \\ 0, & r(A) < n - 1. \end{cases}$$

3、设 a_1, a_2, \dots, a_n 都是非零实数，证明

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right).$$

三、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，设 k 为正整数，求 A^k 。

四、(10 分) 设

$$\vec{\alpha}_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \vec{\alpha}_2 = (2, 3, 4, 5)^T, \vec{\alpha}_3 = (3, 4, 5, 6)^T, \vec{\alpha}_4 = (4, 5, 6, 7)^T.$$

(1) 判别向量组的线性相关性；

(2) 求向量组的一个最大无关组，并用该最大无关组表示其余向量。

五、(10 分) 给定线性空间 P^4 中的两个向量为 $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1, 1)^T$ 。令 $W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$

和 $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$ 。

(1) 求 $W_1 + W_2$ 的维数和一组基；

(2) 求 $W_1 \cap W_2$ 的维数。

昆明理工大学 2021 年硕士研究生招生入学考试试题

六、(10 分) 设 V 为 4 维欧氏空间, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 为 V 的一个标准正交基, 子空间 $W = L(\alpha_1, \alpha_2)$,

其中 $\alpha_1 = \gamma_1 + \gamma_2, \alpha_2 = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$, 试求 W^\perp 。

七、(20 分) P 为数域, 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in P^{3 \times 3}$, 对任意的 $X \in P^{3 \times 3}$, 定义线性变换

$\sigma: \sigma(X) = AX$, 求值域 $\text{Im} \sigma$ 和核 $\text{Ker} \sigma$, 并分别给出它们的一组基和维数。

八、(20 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 2bx_1x_3 (b > 0)$, 其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12, 求

(1) a, b ;

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准型, 并写出对应的正交矩阵。