绍兴文理学院 2021 年硕士研究生入学考试初试试题

报考专业：基础数学、计算数学、应用数学、数学教育

考试科目：高等代数　　科目代码：851

注意事项：本试题的答案必须写在规定的答题纸上，写在试题上不给分。

一、填空题（共 32 分，每小题 4 分）

1.（4 分）$4x^4-7x^2-5x-1=0$ 的有理根是_______。

2.（4 分）线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_3=0 \end{cases}$ 的解空间的维数为__________。

3.（4 分）设 A,B 为 n 阶正交矩阵，且 $|A|>0,|B|<0$，则 $|AB|=$_________。

4.（4 分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量组 β_1,β_2,β_3 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示：

$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3 \\ \beta_2=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 \\ \beta_3=\alpha_1-3\alpha_3 \end{cases}$，则向量组 β_1,β_2,β_3 线性_________。

5.（4 分）用 $P[x]_n$ 表示数域 P 上次数小于 n 的多项式连同零多项式按一般意义下多项式加法和数乘所成的线性空间，$P[x]_n$ 上线性变换 φ：$\varphi\left(f(x)\right)=f'(x)$（微分变换），则 φ 的值域 $\operatorname{Im}\varphi=\{\varphi\left(f(x)\right)\mid f(x)\in P\left[x\right]_n\}$ 为______，φ 的核 $Ker\varphi=\{f(x)\in P\left[x\right]_n\mid\varphi\left(f(x)\right)=0\}$ 为_______。

6.（4 分）设 -1，5，λ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值，则 $\lambda=$_________。

7.（4 分）设 $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，则 A 的 λ-矩阵 $\lambda E-A$ 的标准形为___________。

8.（4 分）欧氏空间中标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的度量矩阵为________________。

二、计算题（共 90 分，每小题 15 分）

1.（15 分）设 $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1, g(x)=x^2-x-1$，求 $(f(x),g(x))$，并求 $u(x),v(x)$，使得 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$。

2.（15 分）计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$（$a_j\neq 0, j=1,2,\cdots,n$）。

3.（15 分）求非齐次线性方程组$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 3 & 6 & -1 & -3\\ 5 & 10 & 1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 8\\ 16\end{pmatrix}$（*）的导出组的一个基础解系，并用此基础解系进一步求（*）的通解。

4.（15 分）已知3阶矩阵A的逆矩阵为$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$，求$A$的伴随矩阵$A^*$的逆矩阵$\left(A^*\right)^{-1}$。

5.（15 分）设$R^{2\times 2}=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix} \mid x,y,z,w\in R\right\}$是所有 2 阶方阵关于一般意义下矩阵加法和数乘构成的线性空间，$\forall A\in R^{2\times 2}$，令$\sigma(A)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}A$，求$\sigma$在线性空间$R^{2\times 2}$的一个基$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$下的矩阵。

6.（15 分）设$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$，求正交矩阵$U$，使得$U^TAU$为对角形。

三、证明题（共 28 分，每小题 14 分）

1.（14 分）已知m个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，但其中任意$m-1$个向量都线性无关，证明：

（1）（7 分）如果等式$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则$m$个数$k_1,k_2,\cdots,k_m$或者全为$0$，或者全不为$0$。

（2）（7 分）如果存在两个等式：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$（I）和$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m=0$（II），其中$l_1\neq 0$，则$\frac{k_1}{l_1}=\frac{k_2}{l_2}=\cdots=\frac{k_m}{l_m}$。

2.（14 分）设σ是数域P上n维线性空间V的线性变换，σ在V的一个基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵为$A$，$\sigma$的核$Ker\sigma=\left\{\alpha \mid \sigma\left(\alpha\right)=O\right\}$，则

（1）（6 分）σ是单射的充要条件是$Ker\sigma=\{O\}$；

（2）（8 分）$Ker\sigma\cong S$（S为$AX=O$的解空间），且$\dim Ker\sigma=n-$秩(A)。