绍兴文理学院2021年硕士研究生入学考试初试试题

报考专业：基础数学、计算数学、应用数学、数学教育

考试科目：数学分析　　科目代码：651

注意事项：本试题的答案必须写在规定的答题纸上，写在试题上不给分。

一、判断题（判断下列命题的对与错，对的请打“√”，错的请打“×”。每小题3分，共10小题，总计30分）

1．数集 S 的上确界一定属于 S .

2. 无界数列一定为无穷大量.

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $|f'(x)|\le k<1$，$\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，令 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且该极限为方程 $x=f(x)$ 的根，且是唯一的.

4. 瑕积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ 发散.

5. 已知函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 与 $\{f_n(x)\}$ 的各项在 I 上连续是已知函数列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)\,(n\to\infty)$ 的充分条件.

6. 以 2π 为周期的函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1+x^2, & 0\le x<\pi\end{cases}$，设其傅立叶级数的和函数为 $s(x)$，则 $s(\pi)=\pi^2$.

7. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，则 $f^2(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

9. 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处任意方向导数都存在，则函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

10. 方程 $xyz^3+x^2+y^3-z=0$ 在原点附近可以确定唯一的隐函数 $z=f(x,y)$.

二、计算题（每小题11分，共8小题，总计88分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2x}\right)$.

2. 求函数 $f(x,y)=4x+xy^2+y^2$ 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上的最大值和最小值.

3. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}dx$，其中 a,b 为两非负实常数.

4. 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+e^x}\sin^2 x dx$.

5. 计算曲面积分 $\iint\limits_S (x-y)dxdy+x(y-z)dydz$，其中 S 是由 $x^2+y^2=1$，$z=0$ 与 $z=3$ 所围立体的外侧.

6. 计算瑕积分 $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x}}dx$.

7. 计算幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ 的和函数.

8. 计算 $\iiint\limits_V \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$，其中 V 是平面 yOz 上的平面图形 $D=\{(y,z)\,|\,y\ge 0, y^2+z^2\le 1, 2y-z\le 1\}$ 绕 Z 轴旋转一周所生成的空间图形.

三、证明题（每小题 16 分，共 2 小题，总计 32 分）

1. 设 $u(x,y)$ 是 $R^2-\{(0,0)\}$ 上 C^2 径向函数，即存在一元函数 $f(x)$ 使得 $u(x,y)=f(r), r=\sqrt{x^2+y^2}$. 若 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，

证明：（1）函数 $f(r)$ 必满足方程 $f''(r)+f'(r)\frac{1}{r}=0$；（10 分）

（2）函数 $u(x,y)=C_1\ln\sqrt{x^2+y^2}+C_2$，其中 C_1,C_2 是任意两实常数.（6 分）

2. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}=\sqrt{2}$.