817

# 沈阳工业大学

## 2020年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

**科目名称：高等代数**　　　　　　　　　　　　　　　　　　

一、（60 分，每小题 6 分）判断对错并简述理由

1、若多项式 $x^d-1$ 能整除 $x^n-1$，则 $d$ 一定整除 $n$.

2、下列线性方程组解中 $x_1$ 的值一定是 3.

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-2, \\ \qquad x_2+2x_3=1, \\ x_1-x_2 \qquad\quad =2. \end{cases}$$

3、矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩是3.

4、设 $A$ 是三阶可逆矩阵，将 $A$ 的第一行与第三行互换后所得的矩阵记为 $B$，那么 $AB^{-1}$ 是一个初等矩阵.

5、已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 $\alpha_1+2\alpha_2$，$2\alpha_2+a\alpha_3$，$3\alpha_3+2\alpha_1$ 线性相关，则 $a$ 的值是 2.

6、设 $V_1$ 与 $V_2$ 分别是齐次方程组 $x_1+x_2+\dots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\dots=x_n$ 的解空间，则必有 $P^n=V_1\oplus V_2$.

7、矩阵 A 一定有一个特征值是 5.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8、每一个 $n$ 维线性空间一定可以表示成 $n$ 个一维子空间的直和.

9、二次型 $10x_1^2+8x_1x_2+24x_1x_3+2x_2^2-28x_2x_3+x_3^2$ 一定是正定的.

10、将多项式环 $P[x]$ 看作是数域 P 上的向量空间，设 $\sigma$，$\tau$ 是此向量空间上的线性变换，$\iota$ 是恒等变换满足 $\sigma\,(f(x))=f'(x),\tau\,(f(x))=xf(x)$. 那么等式 $\sigma\tau-\tau\sigma=\iota$ 必成立.

二、（10 分）计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

三、（8 分）设 $f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x + a_0$，已知 $A$ 是 $n$ 阶方阵，如果 $a_0 \neq 0$，且 $f(A)=O$，证明 $A$ 可逆，并求 $A^{-1}$.

四、（10 分）设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ 是五维欧氏空间 $V$ 的一组标准正交基，$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 表示由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的向量空间，其中 $\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_5,\alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4,\alpha_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，求 $V_1$ 的一组标准正交基.

五、（10 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是一组线性无关的向量，$\beta_i=\sum_{j=1}^{r} a_{ij}\alpha_j$，$i=1,2,\cdots,r$. 证明：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

六、（12 分）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数域 $P$ 中的 $n$ 个两两不等的数，

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

求证：1、$W=\{f(A)\mid f(x)\in P[x]\}$ 是 $P$ 上全体 $n$ 阶方阵生成的向量空间 $M_n(P)$ 的子空间；（6 分）

2、$\dim W = n$.（6 分）

# 沈阳工业大学

## 2020 年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称： 高等代数



七、(10 分) 化下列二次型为标准形

$$x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$$

八、(10 分) 设$\sigma$，$\tau$是线性变换，$\iota$是恒等变换. 如果$\sigma\tau-\tau\sigma=\iota$，证明：$\sigma^k\tau-\tau\sigma^k=k\sigma^{k-1},k>1$.

九、(8 分) 求下列复系数矩阵$A$的若尔当标准形.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

十、(12 分) 设$A$为$n$阶矩阵，$A^*$为其伴随矩阵，且$A_{11}\neq 0$，证明：线性方程组$AX=B$, $B\neq 0$有无穷解的充要条件为$B$是$A^*X=0$的解.