

2022 年硕士研究生招生考试（初试）试题

科目代码： 601 科目名称：高等数学

- 说明：1.本试题为招生单位自命题科目。
2.所有答案必须写在答题纸上，写在本试题单上的一律无效。
3.考生答题时不必抄题，但必须写明题号。
4.本试题共计五大题，满分 150 分。

【本试题共计 2 页，此为第 1 页】

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin t}{x^2}\right)^{\frac{x^3}{t}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ()。
- A、连续 B、有可去间断点 C、有跳跃间断点 D、有无穷间断点
2. 设 $y = f(x)$ 是 $y'' - y' + 2y = 0$ 的一个解，若 $f(x_0) > 0$ 且 $f'(x_0) = 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 ()。
- A. 取得极大值 B. 取得极小值 C. 某邻域内单调增加 D. 某邻域内单调减少
3. 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为 ()。
- A、 $x - y + z = -2$ B、 $x + y + z = 0$ C、 $x - 2y + z = -3$ D、 $x - y - z = 0$
4. 设常数 $k > 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$ ()。
- A、发散 B、绝对收敛 C、条件收敛 D、敛散性与 k 有关
5. 函数 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x e^x$ 满足的一个微分方程是 ()。
- A、 $y'' - 3y' + 2y = x e^x$ B、 $y'' - 3y' + 2y = e^x$ C、 $y'' - 3y' + 2y = -x e^x$ D、 $y'' - 3y' + 2y = -e^x$

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 若 $|\vec{a}| = \sqrt{13}$, $|\vec{b}| = \sqrt{19}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{24}$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$ _____。
2. 设 Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 的内侧，则曲面积分 $\oiint \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$ _____。
3. 微分方程 $x \frac{dy}{dx} - 2y = x^3 e^x$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 的特解为 _____。
4. 设函数 $y(x)$ 为由方程 $x^3 + \int_0^y (1 + \cos t^2) dt = 2$ 所确定的隐函数，则 $dy =$ _____。

考试科目代码: 601 考试科目名称: 高等数学

5. 曲线 $y = (x-1)^2(x-3)$ 的拐点个数为 _____ 个。

三、计算题 (每小题 10 分, 共 80 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} t^2 (e^{t^2} - 1) dt}{(1 - \cos x) \frac{1}{\sqrt{x}}}$ 。

2. 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $2y - xe^{y-1} = 8$ 所确定, 求 $y''(0)$ 。

3. 求不定积分 $\int e^x \operatorname{arccot} e^x dx$ 。

4. 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = (x^2 - 1)dx + (y^2 - 1)dy$, 求函数 $z = f(x, y)$ 的极值点, 并指明极大、极小值点。

5. 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 4| dx dy$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq 9$ 。

6. 求 $I = \int_L [e^x \sin y - 2(x+y)]dx + (e^x \cos y - x)dy$, L 为从点 $A(2, 0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 到点 $O(0, 0)$ 的弧。

7. 已知 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 而 $z = f(e^x \sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} z$, 求 $f(u)$ 的表达式。

8. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^{n-1}$ 的收敛域与和函数。

四、应用题 (10 分)

设曲线 $y = 2\sqrt{x-1}$, 过原点作曲线的切线, 求: (1) 此切线方程; (2) 曲线、切线及 x 轴所围成的平面图形的面积以及其绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积 V_x 。

五、证明题 (每小题 10 分, 共 20 分)

1. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) = \frac{1+2\sin x}{\sqrt{1-x^2}} + 2|x| \int_{-1}^1 f(x) dx$, 证明: $\int_{-1}^1 f(x) dx = -\pi$ 。

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = f(1) = 1, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

试证: 任意 $t \in (0, 1) \exists \eta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta) = t$ 。