

2023 年硕士研究生招生考试题签

(请考生将题答在答题册上, 答在题签上无效)

科目名称: 高等代数

第 1 页共 2 页

一、(60 分, 每小题 6 分) 判断对错并简述理由。

1. 设  $f(x), p(x)$  是数域  $P$  上的一元多项式, 且  $p(x)$  为不可约多项式, 那么  $p(x)|f(x)$  或  $(f(x), p(x))=1$ .
2. 设  $n$  级方阵  $A$ ,  $|A|=2$ , 则  $|-A|=-2$ .
3. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$  线性无关, 则  $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$  也线性无关.
4. 设方阵  $A$  满足  $A^2 - A - 2E = 0$ , 则  $A$  可逆.
5. 设  $A$  是  $n$  级实对称矩阵, 若存在  $n$  级可逆实对称矩阵  $C$ , 使得  $A = C^2$ , 则  $A$  是正定的.
6. 设方程组 
$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 只有零解, 那么  $k=1$ .
7. 全体  $n$  级实上三角矩阵, 对于矩阵的加法和数乘构成实数域上的线性空间.
8. 以任一非零向量为特征向量的线性变换为零变换.
9. 若  $0$  是矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$  的一个特征值, 则  $a=1$ .
10. 设  $n$  维欧氏空间  $V$  中, 向量  $\alpha, \beta$  的内积记为  $(\alpha, \beta)$ ,  $\sigma$  为  $V$  的线性变换, 规定二元函数  $\langle \alpha, \beta \rangle = (\sigma(\alpha), \sigma(\beta))$ , 那么  $\langle \alpha, \beta \rangle$  也构成  $V$  上的内积.

二、(10 分) 利用多项式有理根的判别方法, 求下列多项式的标准分解式:

$$f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3.$$

- 三、(10 分) 计算  $n$  阶行列式 
$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$
, 其中  $x_i \neq a_i, i=1, 2, \dots, n$ .

## 2023 年硕士研究生招生考试题签

(请考生将题答在答题册上, 答在题签上无效)

科目名称: 高等代数

第 2 页共 2 页

四、(10 分) 设  $B$  为一  $r \times r$  矩阵,  $C$  为一  $r \times n$  矩阵, 且  $C$  的秩为  $R(C) = r$ . 如果  $BC = 0$ , 那么  $B = 0$ .

五、(10 分) 已知  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $A^n$ .

六、(10 分) 设  $n$  元齐次线性方程组  $AX = 0$  和  $BX = 0$ , 且  $AX = 0$  的解都是  $BX = 0$  的解, 证明:

$AX = 0$  与  $BX = 0$  同解的充分必要条件是  $R(A) = R(B)$ .

七、(10 分) 设向量  $\alpha_1 = (1, -1, 0, 1)$ ,  $\alpha_2 = (1, 0, 2, 3)$ ,  $\beta_1 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $\beta_2 = (0, 1, 0, 0)$ , 由  $\alpha_1, \alpha_2$  生成的子空间为  $W_1$ , 由  $\beta_1, \beta_2$  生成的子空间为  $W_2$ , 求子空间  $W_1 \cap W_2$  的维数与一组基.

八、(10 分) 设  $V$  是复数域上的  $n$  维线性空间,  $\sigma, \tau$  是  $V$  的线性变换, 且  $\sigma\tau = \tau\sigma$ , 证明: (1) 如果  $\lambda_0$  是  $\sigma$  的一个特征值, 那么  $V_{\lambda_0}$  是  $\tau$  的不变子空间; (2)  $\sigma, \tau$  至少有一个公共的特征向量.

九、(10 分) 设实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ ,

(1) 求该二次型的所有特征值; (2) 若该二次型的规范形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 求  $a$  的值.

十、(10 分) 求复系数矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$  的若尔当标准形.