沈阳工业大学

2022年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

一、（60分，每小题6分）判断对错并简述理由。

1. 多项式 $x^4-8x^3+12x^2+2$ 在有理数域上是可约的。

2. 设 $A=(a_{ij})$ 为6阶方阵，则在其行列式 $|A|$ 中 $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$ 项前所带的符号是负号。

3. 设 A 为 $n(n>2)$ 阶方阵，如果 A 的秩为 $n-2$，那么 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为0。

4. 设 a,b,c 为互不相同的数，向量组 $\alpha_1=(1,a,a^2)$，$\alpha_2=(1,b,b^2)$，$\alpha_3=(1,c,c^2)$，那么 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

5. 若 n 阶方阵 A 为正定矩阵，那么 A^2+A 也是正定矩阵。

6. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则其中任意向量都可由其他向量线性表示。

7. 设 R^3 是实数域 R 上的三维线性空间，则集合 $V=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x+2y+3z+4=0\}$ 是 R^3 的线性子空间。

8. 设方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 A 的若尔当标准形为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

9. 上三角形的正交矩阵必为对角矩阵。

10. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是三维欧氏空间 V 的一组标准正交基，$\eta_1=\frac{1}{3}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2-2\varepsilon_3)$，$\eta_2=\frac{1}{3}(2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3)$，$\eta_3=\frac{1}{3}(-2\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3)$，那么 η_1,η_2,η_3 也是 V 的一组标准正交基。

二、（10分）

设 $f_1(x),f_2(x)$ 和 $g_1(x),g_2(x)$ 都是数域 P 上的一元多项式，且

$$\left(f_i(x),g_j(x)\right)=1,(i=1,2;j=1,2).$$

证明：$\left(f_1(x)f_2(x),g_1(x)g_2(x)\right)=1$.

三、（10分）计算n阶行列式$\begin{vmatrix} 2+1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2+\frac{1}{2} & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2+\frac{1}{3} & \cdots & 2 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2+\frac{1}{n} \end{vmatrix}$.

四、（12分）问λ取什么值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+(2+\lambda)\ x_2+6x_3+4x_4=1 \end{cases}$ 有解？并求该方程组的全部解.

五、（9分）设A,B为$n\times n$矩阵，且$AB=0$，证明：$R(A)+R(B)\le n.$

六、（10分）设向量组$\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_r$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_r$，$\cdots$，$\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}$，

证明：两个向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$有相同的秩。

七、（10分）设$A\in P^{n\times n}$，且A可逆，令$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$，$n$元齐次线性方程组$A_1x=0$与$A_2x=0$的解空间分别为$W_1,W_2$,证明：$P^n=W_1\oplus W_2$.

八、（10分）设σ是线性空间R^3的线性变换，满足对任意的$\alpha=(x,y,z)\in R^3$，有

$$\sigma(\alpha)=(x+y,y+z,z+x)$$

求σ的特征值及特征向量，并判断σ是否可对角化。

九、（10分）设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+6x_1x_2$，（1）利用正交线性替换将该二次型化为标准形；（2）求该二次型的规范形；（3）求二次型的正、负惯性指数。

十、（9分）设A,C为正定矩阵，B是满足$AX+XA=C$的唯一解，证明：B是正定矩阵。